

請考生依指示
填寫准考證末三碼

--	--	--

國立臺灣大學
113 年度高中科學班資格測驗試題本
數學

—作答注意事項—

考試時間：共 120 分鐘（請自行斟酌分配時間）

作答方式：務必作答於「各科答案卷上」，請以黑色或藍色原子筆、鋼珠筆
或中性筆作答，並標明題號。

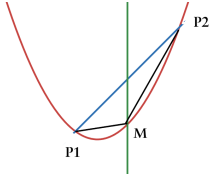
祝考試順利！

請聽到鈴(鐘)聲響後，於題本右上角方格
內填寫准考證末 3 碼，再翻頁作答。

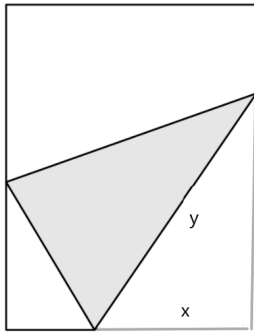
本試題共有4題，每題25分。

說明：請依序將各問題答案書寫於答案卷上，並完整呈現你的計算或是論證過程。

1. 考慮一個拋物線 $y = ax^2$ ，和拋物線上的兩點 $P_1 \neq P_2$ ，其中 $a > 0$ 是常數。假設直線 $x = b$ 等分割線 $\overline{P_1P_2}$ ，令 $M = (b, ab^2)$ 是拋物線上的另一點。請證明以下性質。

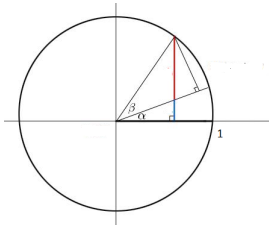


- (a) 拋物線在點 M 的切線平行於 $\overline{P_1P_2}$ 。
 (b) 如果 $\overline{P'_1P'_2}$ 是拋物線的割線，而且 $\overline{P'_1P'_2}$ 與 $\overline{P_1P_2}$ 平行，則直線 $x = b$ 也會等分 $\overline{P'_1P'_2}$ 。
 (c) 拋物線和 $\overline{P_1P_2}$ 圍出的區域面積是三角形 $\triangle P_1MP_2$ 面積的 $\frac{4}{3}$ 倍。
2. 有一個長方形，長 30 公分，寬 20 公分。折一直線，把直線下方三角形區域翻轉，使得右下頂點剛好碰到對面長邊。求 x 值讓折線長度 y 最短。



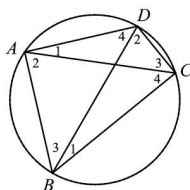
3. (a) 請參考附圖以幾何方法證明合角公式

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta, \quad \cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta.$$



- (b) 由合角公式證明托勒密定理: 若 $ABCD$ 是圓內接四邊形，則

$$\overline{AB} \times \overline{CD} + \overline{AD} \times \overline{BC} = \overline{AC} \times \overline{BD}$$



4. 定義一個數列:

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = \sqrt{2a_n + n^2}, \quad n = 1, 2, \dots$$

定義 $[x]$ 是不大於 x 的最大整數。

(a) 求 $n \geq 2$ 時 $[a_n]$ 的通式。

(b) 令 $b_n = [a_n] - a_n + 1$ 。證明當 $n \geq 2$ 時 $0 < b_n < \frac{1}{n}$ 。

試題結束