

請考生依指示  
填寫准考證末三碼

--	--	--

國立臺灣大學  
112 年度高中科學班資格測驗試題本  
數學

—作答注意事項—

考試時間：共 120 分鐘（請自行斟酌分配時間）

作答方式：務必作答於「各科答案卷上」，請以黑色或藍色原子筆、鋼珠筆  
或中性筆作答，並標明題號。

祝考試順利！

請聽到鈴(鐘)聲響後，於題本右上角方格  
內填寫准考證末 3 碼，再翻頁作答。

本試題共有4題。

說明：請將各問題答案依序書寫於答案卷上。

1. [25%] 設三角形的外心為  $O$ , 垂心為  $H$ , 求證

$$\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} = \vec{OH}$$

2. [25%]  $\triangle ABC$  為等腰直角三角形,  $C$  為直角,  $D$  為線段  $\overline{AB}$  上一點, 且  $\overline{AB} = 3\overline{DB}$ . 若  $\overline{AE}$  為  $\triangle ACD$  中  $\overline{CD}$  邊上的高,  $E \in \overline{CD}$ , 求  $\angle DEB$ .

3. [25%]

- a. 考慮三次函數  $f(x) = x^3 + px + q$ , 請用微積分方法 構造一個係數  $p$  和  $q$  的表式  $\Delta(p, q)$ , 使得  $\Delta(p, q)$  可以作為判別式:  $f(x)$

$$\begin{cases} \text{有三根, } \Delta(p, q) < 0 \\ \text{有二根, } \Delta(p, q) = 0 \\ \text{有一根, } \Delta(p, q) > 0 \end{cases}$$

寫出詳細證明過程.

- b. 針對一般三次函數  $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ,  $a \neq 0$ , 提出一個合理可行的判別式方案, 但不需寫出完整係數判別式.
4. [25%] 連續擲一枚公正的銅板, 令隨機變數  $X = n$  表示直到第  $n$  次 ( $n \geq 2$ ) 才在最後兩次出現「正反」的事件, 求期望值  $E(X)$  與變異數  $\text{Var}(X)$ .

試題結束