

代碼	N092
隊名	HomoLogY
導讀書	《平面國：向上，而非向北！》
撰文	臺北市立建國高級中學 徐楷程、姚勁宇、林奕帆
指導老師	臺北市立建國高級中學 沈朋裕

你是否曾經想像過高維度的世界長得甚麼樣子?生活在三維空間的我們，對於一二維已再熟稔不過，但是到了更高的四五維世界時，往往難以想像其面貌。書中藉由生活在平面國的正方形探訪一維及三維世界的旅程中發生的種種神奇事件，描寫出當我們探訪其他維度的世界時可能發生的事情，讓人對於維度的概念以及彼此之間的交互關係有更深的了解。其中對於生活在平面國的居民的描述讓人印象深刻，那裡的男性國民，根據社會階級由低至高，分別為三角形、四方形……到圓形，女性則為直線（其實為寬度極窄的長方形），他們眼睛所見的世界由許多具有不同顏色、亮度的極細線段所構成，並以此分辨他人的形狀。

對於書中提到低維度比較難以想像高維度的情況，讓我們得到了一些啟發：

在 0 維的空間中只能容納一個物件(一個點)；而一維的世界能容納不只一個物件了，但這些物件之間不能「繞過」對方，會被彼此擋住；到了二維的世界，物件不會彼此互相阻擋，但不能發展出有「消化管」的生物，因為這種會貫穿身體的構造會讓生活在二維空間中的生物一分為二；至於我們生活的三維空間，則有具有「消化管」的生物(像人類)，那是否也有在我們三維空間不可能實現，只有在更高維度才能存在的構造呢?答案是肯定的。

這種較高維度擁有較低維度所不具備的結構與性質，在數學研究上也有其對應。

Poincaré conjecture 是著名的千禧年七大難題之一，問題的敘述如下：

“Every simply connected, closed n -manifold is homeomorphic to n -sphere.”

1961 年 *Stephen Smale* 證明 n 大於 4 的 *Poincaré conjecture* 成立、 n 等於 4 則在 1981 年被 *Michael Freedman* 證明會成立，但 n 等於 3 的情況直到 2002 年才被 *Grigori Perelman* 證明會成立(2006 年才把其中的漏洞補全)。為何高維度的 *Poincaré conjecture* 反而相對較容易證明呢?有個原因是高維度時有辦法巧妙的「繞過」會出問題的部分，而低維度時則必須引入一些工具才能解決，這概念就像前面提到 2 維以上空間內的物件不會互相堵住對方、3 維以上空間內的連通物件畫一條線通過(消化管)不會解體(分成兩塊)。

此外書中提到平面國的國民大多不接受第三維度的概念，就連宣傳第三維度給正方形的球體也不相信第四維度的存在，只因為在他們生活了一輩子的世界中從來沒有看過類似的東西。「你說我有高。請測量出我的高度，我就相信你。」這是平面國的主教在聽見正方形所想要傳達「立體」的概念時提出的質疑，就像是我們在學習數學這門科學的時候，對於我們無法用眼睛去看到、或是不存在於生活中的概念也很難去接受，這時

常是從初等數學踏入高等數學的一大高牆——無法接受比較抽象，不能藉由具體例子來描述的概念，讓人往往因此卻步、減少繼續學習的熱誠。但令人振奮的是，書中的正方形最後放下了自己的成見，接受第三維度的概念，甚至聯想到了即使是球體也沒有想過的第四維度的存在的可能性，彷彿在跟我們呼籲在學習數學或其他科學的路上，要勇於接受已證明的事實，就算不是這麼的直觀存在的結論，就算是個抽象的概念，只要是正確的就要勇於接受，並且對未知的方向大膽的作出假設，才能在數學或科學的路程中成長、茁壯。