2012科學班數學考卷第二題

將南極北極連線取爲 z 軸, 將東經30度的平面取爲 x-z 平面, 將東經120度的平面取爲 y-z 平面。若令一點的位置爲東經 A 度、北緯 B 度, 則其與空間坐標 (x, y, z) 的關係爲

$$(x, y, z) = (\cos B \cos(A-30), \cos B \sin(A-30), \sin B) \quad (\text{此處皆用度數單位})$$

因此 P 的坐標爲 $(0, \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})$, Q 的坐標爲 $(\frac{1}{2}, 0, \frac{\sqrt{3}}{2})$.

1. 由於半徑爲1, 由題意知兩點 P 與 Q 之大圓距離, 即大圓圓弧 $\overset{\frown}{PQ}$ 長.

$$\cos \overset{\frown}{PQ} = \overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ} = \frac{\sqrt{3}}{4} \overset{\text{查表}}{=} \sin(25.6...^\circ)$$

所以

$$\frac{90-25.7}{180} \cdot \pi \leq \overset{\frown}{PQ} \leq \frac{90-25.6}{180} \cdot \pi$$

可得 $\overset{\frown}{PQ} \approx 1.12$ (因爲 $\pi \approx 3.1416$).

2. 設 R 坐標爲 (x, y, z). 由題意知

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{2}x + \tfrac{\sqrt{3}}{2}z &= \cos \overset{\frown}{QR} = \cos 60^\circ = \tfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \tfrac{\sqrt{3}}{2}y + \tfrac{1}{2}z &= \cos \overset{\frown}{PR} = \cos 30^\circ = \tfrac{1}{2} \end{aligned}$$

化簡可得

$$\begin{aligned} x &= \sqrt{3}(1-z) \\ y &= \tfrac{1}{\sqrt{3}}(1-z) \end{aligned}$$

代入球方程式 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 得

$$\frac{10}{3}(1-z)^2 + z^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{10}{3}(1-z)^2 = (1-z)(1+z)$$

顯然 $(x, y, z) = (0, 0, 1)$ 爲一解 (即北極點), 消去 $1-z$後, 得

$$\frac{10}{3}(1-z) = 1+z \quad \Rightarrow \quad z = \frac{7}{13}$$

解得另一解爲 $(x, y, z) = (\frac{6\sqrt{3}}{13}, \frac{2\sqrt{3}}{13}, \frac{7}{13})$

若令 R 點的位置爲東經 A 度、北緯 B 度, 則由前知

$$(x, y, z) = (\cos B \cos(A-30), \cos B \sin(A-30), \sin B)$$

由 $\sin B = \frac{7}{13}$, 查表知 $B \approx 33$. 又

$$\cos B \sin(A-30) = \frac{2\sqrt{30}}{13} \sin(A-30) = \frac{2\sqrt{3}}{13} \quad \Rightarrow \quad \sin(A-30) = \frac{1}{\sqrt{10}}$$

查表可得到 $A-30 \approx 18.4$或18.5, 故 A 爲東經 48度 (或東經49度也算正確).

故答案 R 點爲北極點, 或其經緯度爲東經 48度 (或東經49度)、北緯33度。

2012 科學班數學試題第二題說明

本題牽涉到空間坐標的延伸，因此對坐標幾何和向量幾何還不熟悉的高一學生，絕大部分接皆無法答題，並不令人意外，這些學生也不需要氣餒。

關於將經緯度換成空間坐標，屬於課程標準的自然延伸，對科學有興趣的同學，無論是地球科學的經緯度或天文學的赤經、赤緯，多少都有些概念，能夠將它轉化為坐標幾何，本身是一個有趣的挑戰。

另一個需要思考的是大圓弧長的計算，這裡需要學生意識到弧長的計算牽涉到圓心角，而圓心角的大小可以從向量內積與查表得知。

因此空間坐標和經緯度轉換、向量幾何、查表、以及正餘弦的三角恆等式（因列表涵蓋範圍不夠而需要），構成解決本題的四項基本功夫。

如果這些功夫都能具足，就能解決第一部分的問題，得到 35 分。大概有 1/3 學生得到全部或還不錯的分數。

問題的第二部份需要的基本功夫不變（只是轉換方向），並需將問題轉換成非典型的代數方程組問題，這是第二部份的挑戰。從結果來看得分分佈普遍欠佳，這或許是由於時間的關係，加上同學不能冷靜觀察方程組中的關係，導致計算過程太繁複，容易發生錯誤。

參考答案中是觀察到東經 30 度和東經 120 度相差 90 度的特性，所取的特別坐標。當然同學也可以設定東經 0 度為 xz 平面，計算會稍微複雜。另外有些同學使用經緯度的對應空間坐標，直接計算內積並解題，也相當能簡化計算過程。

基本上，本題雖然不算簡單，但也不是鑽牛角尖的問題，所使用的工具涵蓋了許多高中生常見的重要題材，得高分的同學，都展現了他們對這些工具的掌握度。