如何分解 $x^3+y^3+z^3+cxyz$

張海潮

國立臺灣大學數學系(退休)

本文想要討論 $F(x,y,z)=x^3+y^3+z^3+cxyz$ (c 是常數)的因式分解。

首先，F 是一個齊次多項式，因此如果 $F=f\cdot g$，則 f 和 g 都是齊次多項式。原因如下 ：如果 f 不是齊次式，則將 f 重組寫成 $f_n+f_{n\text{-}1}+\cdots+f_{n\text{-}k}$，式中 f_j 包含 f 所有的 j 次單項式， $f_n\neq 0$， $f_{n-k}\neq 0$，$k>0$。同樣的，將 g 重組寫成 $g_m+\cdots+g_{m-l}$， $g_m\neq 0$， $g_{m-l}\neq 0$. 由於 $F=(f_n+\cdots+f_{n-k})(g_m+\cdots+g_{m-l})$，我們從 $f_ng_m\neq 0$， $f_{n-k}g_{m-l}\neq 0$ 得到 F 並非齊次，此與假設不合。

接下來，因為 F 是三次齊次式，所以如果能分，因式中必有一次的齊次式出現。不妨假設這個一次因式是 $\alpha x+\beta y+\gamma z$ ，以下分成三種情形討論。

$\alpha=\beta=\gamma\neq 0$

此時 $F=(x+y+z)g(x,y,z)$，g 是一個二次齊次式。g 可以寫成 $g=x^2+y^2+z^2+rxy+syz+tzx$ 。注意到 $F(x,y,z)$ 是 x，y，z 的對稱式，所以如果 $r\neq s$，則 F 至少會有另外一個額外的因式 $x^2+y^2+z^2+sxy+ryz+tzx$，此與 F 的次數不合，因此 $g=x^2+y^2+z^2+r(xy+yz+zx)$ 。

檢查 $(x+y+z)\left(x^2+y^2+z^2+r(xy+yz+zx)\right)$ 的 x^2y 項，x^2y 的係數是 $1+r$。由於 F 中沒有這一項，所以 $1+r=0$，$r=-1$. 亦即，

$$F(x,y,z)=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx).$$

再看 xyz 項的係數，xyz 的係數是 -3，得到 $F(x,y,z)=x^3+y^3+z^3-3xyz$，其因式分解等於 $(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)$.

α，β，γ 互不相等

因為 F 的對稱性，若將 $\alpha x+\beta y+\gamma z$ 中的 x，y，z 任意調換，會得到另外 5 個不同的一次式，總共 6 個一次式，均為 F 的因式。但是 F 的次數為 3，此為不可能。

最後剩下一種情形 ：

α，β，γ 中只有兩數相等

例如 $0\neq\alpha=\beta\neq\gamma$，此時 F 的一次因式是 $x+y+\gamma z$. $x+y+\gamma z$，$\gamma\neq 1$，則 F 與

$G(x,y,z)=(x+y+\gamma z)(x+\gamma y+z)(\gamma x+y+z)$ 只差一個常數倍。將三式的乘積展開得到 : $G(x,y,z)$ 的 x^3 項的係數為 γ ， $x^2 y$ 項的係數為 $1+\gamma+\gamma^2$, xyz 項的係數為 $3(\gamma+1)$.

由於 F 沒有 $x^2 y$ 項，所以 $1+\gamma+\gamma^2=0$, 亦即 $\gamma=\omega$ 或 ω^2，其中 $\omega=\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$, $\omega^2=\dfrac{-1-\sqrt{3}i}{2}$, 均為 1 的 3 次方根。以 $\gamma=\omega$ 為例，

$$F(x,y,z)=x^3+y^3+z^3+3\frac{(\gamma+1)}{\gamma}xyz,$$

所以

$$c=3\frac{(\gamma+1)}{\gamma}=3(\gamma+1)\gamma^2=3(1+\gamma^2).$$

結論是除了 $c=-3$, $3(1+\omega^2)$, $3(1+\omega)$ 以外， $x^3+y^3+z^3+cxyz$ 均不可分解。可以分解的只有下列三式 :

$$x^3+y^3+z^3-3xyz=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx),$$

$$x^3+y^3+z^3+3(1+\omega^2)xyz=(x+y+\omega z)(x+\omega y+z)(\omega x+y+z)/\omega,$$

$$x^3+y^3+z^3+3(1+\omega)xyz=(x+y+\omega^2 z)(x+\omega^2 y+z)(\omega^2 x+y+z)/\omega^2,$$

式中 $\omega=\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$, $\omega^2=\dfrac{-1-\sqrt{3}i}{2}$, $1+\omega+\omega^2=0$.

最後，我想說明 $x^3+y^3+z^3-3xyz=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)$ 這個問題究竟從何而來？將上式改寫為

$$x^3+y^3+z^3=3xyz+(x+y+z)\left((x+y+z)^2-3(xy+yz+zx)\right)$$

右邊出現 $x+y+z$, $xy+yz+zx$ 和 xyz 這三個三變數的「基本多項式」，我們從代數學知道任何對稱多項式都可以用基本多項式的多項式來表達。上式就是說明對稱式 $x^3+y^3+z^3$ 如何以基本多項式 $x+y+z$, $xy+yz+zx$ 和 xyz 表示。由於這個表示法是唯一的，所以 xyz 的係數必須是 3, 這也是 $x^3+y^3+z^3-3xyz$ 可以分解的理由之一。

所有的考生都學過這個因式分解：$^3+Y^3+Z^3-3XYZ=(X+Y+Z)(X^3+Y^3+Z^{3-XY-YZ-ZX})$---(1)
現在題目變成 $X^3+Y^3+Z^3+3XYZ$---(2)是否能夠分解？

照理說(1)式的分解經驗應該要對解決(2)式提供線索，可是對絕大部分的考生而言(1)式對解決(2)式起不了作用，為什麼呢？一定式老師在教(1)式的時候沒有告訴學生 $X^3+Y^3+Z^3-3XYZ$ 或 $X^3+Y^3+Z^3+3XYZ$ 的兩個特徵：

(甲)它們是齊次式

(乙)(乙)它們是對稱式

正是(甲)(乙)兩個特徵幫助我們解決(1)式，因此只要仍然從(甲)(乙)兩個特徵出發，便能嘗試提出解決(2)的策略。

Dolya 在《How to solve it》一書中說：解題要掌握四個步驟：(一)認識題目、(二)提出策略、(三)切實執行、(四)回顧反思。數學老師在教學時，經常忽略步驟(四)，結果就是解決(1)式的經驗無法幫助解決(2)式，結論是老師這一環的問題最大。