

國立台灣大學
100 學年度高中科學班資格測驗試題本
數學

—作答注意事項—

考試時間：共 60 分鐘（請自行斟酌分配時間）

作答方式：務必作答於「各科答案卷上」，請以黑色或藍色原子筆、鋼珠筆或中性筆作答，
並標明題號。

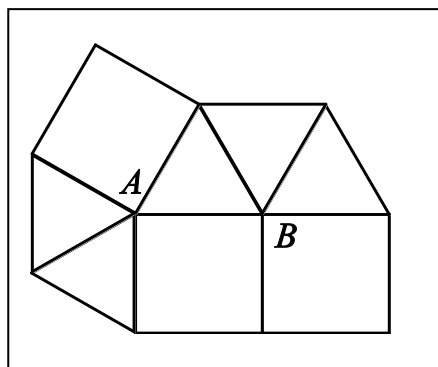
祝考試順利

第壹題：(佔分 50)

說明：以下有一大題四小題的題目，請根據題目敘述作答，並詳述答題理由。答案務必寫在答案卷上，並於題號欄標明題號（1.2.3.4），否則將予扣分。題號後標示之百分比（如：[15%]）為配分。

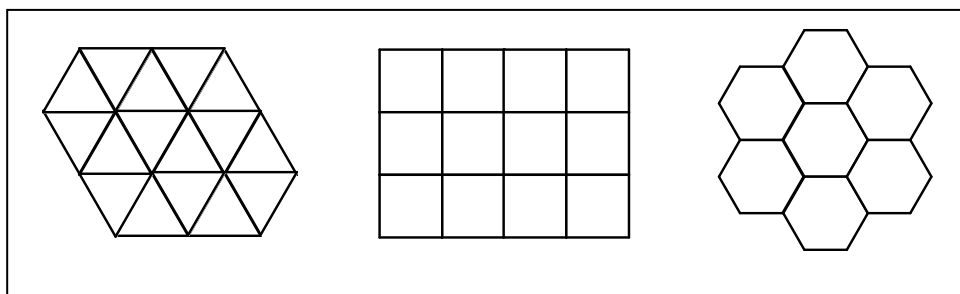
我們要討論在平面上拼貼正多邊形磁磚的各種樣式。拼貼的條件如下：

- 所有磁磚都是邊長彼此相等的正多邊形（不限一種）。
- 拼貼時邊與邊必須對齊，而且不能破壞磁磚。
- 假設平面是沒有邊界的，因此不用擔心邊界的問題
- 對稱性：每個頂點周圍正多邊形的排列樣式必須相同。也就是說，對任何兩個頂點，正多邊形排列樣式透過平移加上旋轉或鏡射必須可以重疊。（例如與下圖 *A*、*B* 兩點相鄰的，雖然都是三個正三角形與兩個正方形，但並不滿足對稱性。）



請依序回答下列問題：

- (1) [5%] 如果只用一種正多邊形，說明只有正三角形、正方形、正六邊形三種可能（下圖）。



- (2) [5%] 與頂點相接的正多邊形數，最大是多少？
- (3) [15%] 如果限定與頂點相接的正多邊形數為 5，並只使用兩種正多邊形，其中 3 個為一種正多邊形，另外 2 個為另一種正多邊形，問共有幾種可能性，試討論並繪圖。
- (4) [25%] 如果限定與頂點相接的正多邊形數為 3，問共有幾種可能性，試討論並繪圖。

第貳題：(佔分 50)

說明：以下有一大題三小題的題目，請根據題目敘述作答，並詳述答題理由；答案務必寫在答案卷上，並於題號欄標明題號(1, 2, 3)，否則將予扣分。題號後標示之百分比(如：[15%])為配分。

實係數三次多項式 $g(x) = x^3 + \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ ，其中 α, β, γ 為實數。 $g(x)$ 的變號數定義如下：

把 $1, \alpha, \beta, \gamma$ 依序排列(如果 α, β, γ 中有 0 就不計入)，然後由 1 開始向右觀察，如果正負號改變就計一個變號數，依此繼續。例如：

$g(x)$	係數排列	變號數
$x^3 - x^2 + 2x - 3$	1, -1, 2, -3	3
$x^3 + 2x - 3$	1, 2, -3	1
$x^3 - x^2 - 3$	1, -1, -3	1
$x^3 + x^2 + 2x + 3$	1, 1, 2, 3	0
$x^3 - x^2 + 2x$	1, -1, 2	2

請完成下述的證明(實根數的計算，如果是兩重根計 2，如果是三重根計 3)

- (1) [15%] 如果 $g(x) = x^3 + \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ 的變號數是 0，則 $g(x) = 0$ 無正實根。
- (2) [15%] 如果 $g(x) = x^3 + \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ 的變號數是 2，則 $g(x) = 0$ 不可能恰有一個正實根。
- (3) [20%] 如果 $g(x) = x^3 + \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ 的變號數是 3，則 $g(x) = 0$ 不可能恰有兩個正實根。