**進階電磁學**

**課程筆記**

**第17-2講、Chapter 26**

**The Potentials and fields for a charge moving with constant velocity and Special theory of Relativity (2)**

授課教師：台灣大學物理系　易富國教授
筆記編寫：台灣大學物理系　曾芝寅助理
編者信箱：f01222076@ntu.edu.tw
上課學期：100學年度第一學期


本著作係採用[創用 CC 姓名標示-非商業性-相同方式分享 3.0 台灣 授權條款](http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/3.0/tw/deed.zh_TW)授權.

**等速運動磁鐵、與等速運動電荷之類比**

等速 $\vec{v}$ 運動的磁鐵，可以方程式 $∇×\vec{E}=-\frac{∂\vec{B}}{∂t}$ 描述。

*S*

*N*

$$\vec{v}$$

$$S\left(\vec{E}\ne \vec{0},\vec{B}\right)$$

如何解得電場與磁場的關係？

可利用類比的辦法，並參考上一講的結果：

對等速 $\vec{v}$ 運動的電荷，

$$\vec{E}$$

$$\vec{B}$$

$$\vec{v}$$

$$S\left(\vec{B}-\vec{v}/c^{2}×\vec{E}=\vec{0}\right)$$

以方程式 $∇×\vec{B}=\frac{1}{c^{2}}\frac{∂\vec{E}}{∂t}$ (可忽略 $\vec{J}$ ) ，解出：

$$\vec{B}-\frac{\vec{v}}{c^{2}}×\vec{E}=\vec{0}$$

如此，利用方程式的對稱性 $\left(\vec{B}\rightarrow \vec{E},\frac{\vec{E}}{c^{2}}\rightarrow -\vec{B}\right)$ ，

對移動速度 $\vec{v}$ 的磁鐵所生電磁場，應解出：

$$\vec{E}+\vec{v}×\vec{B}=\vec{0}$$

以上的等式有著豐富的意涵。

接著，探討坐標系轉換的情形：

I、電荷於坐標系 $S$ 中以等速 $\vec{v}$ 運動，於坐標系 $S^{'}$ 中靜止。

$S^{'}$ 見電荷靜止，磁場應為零。

$$q$$

$$\vec{v}$$

$$\vec{v}$$

$$S\left(\vec{B}-\vec{v}/c^{2}×\vec{E}=\vec{0}\right)$$

$$S^{'}\left(\vec{B}^{'}=\vec{0}\right)$$

相似的，有

$$\vec{B}-\vec{v}/c^{2}×\vec{E}=\vec{0}$$

$$\vec{B}^{'}=\vec{0}$$

**要點：這兩個** $\vec{0}$ **應有關係。**

II、磁鐵於坐標系 $S$ 中以等速 $\vec{v}$ 運動，於坐標系 $S^{'}$ 中靜止。

$S^{'}$ 見磁鐵靜止，電場應為零。

*S*

*N*

$$\vec{v}$$

$$\vec{v}$$

$$S\left(\vec{E}+\vec{v}×\vec{B}=\vec{0}\right)$$

$$S^{'}\left(\vec{E}^{'}=\vec{0}\right)$$

因此有

$$\vec{E}+\vec{v}×\vec{B}=\vec{0}$$

$$\vec{E}^{'}=\vec{0}$$

III、電荷於坐標系 $S$ 中靜止，於坐標系 $S^{'}$ 中以等速 $-\vec{v}$ 運動。

相似的，類比I，有

$$\vec{B}=\vec{0}$$

$$\vec{B}^{'}+\frac{\vec{v}}{c^{2}}×\vec{E}^{'}=\vec{0}$$

IV、磁鐵於坐標系 $S$ 中靜止，於坐標系 $S^{'}$ 中以等速 $-\vec{v}$ 運動。

相似的，類比II，有

$$\vec{E}=\vec{0}$$

$$\vec{E}^{'}-\vec{v}×\vec{B}^{'}=\vec{0}$$

接下來尋找這幾組例子中兩個 $\vec{0}$ 的關係。

將電磁場分開為垂直、平行運動速度的分量：

有 $\left\{\begin{array}{c}\vec{B}=\vec{B}\_{∥}+\vec{B}\_{⊥}\\\vec{E}=\vec{E}\_{∥}+\vec{E}\_{⊥}\end{array}\right.$，$\left\{\begin{array}{c}\vec{B}^{'}=\vec{B}\_{∥}^{'}+\vec{B}\_{⊥}^{'}\\\vec{E}^{'}=\vec{E}\_{∥}^{'}+\vec{E}\_{⊥}^{'}\end{array}\right.$

設 $\vec{v}=v\_{0}\vec{e\_{x}}$ ，則有如 $B\_{∥}=B\_{x}$, $\vec{B}\_{⊥}=B\_{y}\vec{e\_{y}}+B\_{z}\vec{e\_{z}}$

假設上述這些 $\vec{0}$ 有**比例關係** $k\_{∥}$, $k\_{⊥}$

I

$$\left\{\begin{array}{c}B\_{∥}^{'}=k\_{∥}\left(\vec{B}-\frac{\vec{v}}{c^{2}}×\vec{E}\right)\_{∥}=k\_{∥}B\_{∥}\\\vec{B}\_{⊥}^{'}=k\_{⊥}\left(\vec{B}-\frac{\vec{v}}{c^{2}}×\vec{E}\right)\_{⊥}=k\_{⊥}\left(\vec{B}\_{⊥}-\frac{\vec{v}}{c^{2}}×\vec{E}\_{⊥}\right)\end{array}\right., \left(注意 \vec{v}×\vec{E}\_{∥}=0\right)$$

III，相似的，

$$\left\{\begin{array}{c}B\_{∥}=k\_{∥}B\_{∥}^{'} \\\vec{B}\_{⊥}=k\_{⊥}\left(\vec{B}\_{⊥}^{'}+\frac{\vec{v}}{c^{2}}×\vec{E}\_{⊥}^{'}\right)\end{array}\right.$$

 **比例關係** $g\_{∥}$, $g\_{⊥}$

II

$$\left\{\begin{array}{c}E\_{∥}^{'}=g\_{∥}E\_{∥} \\\vec{E}\_{⊥}^{'}=g\_{⊥}\left(\vec{E}\_{⊥}+\vec{v}×\vec{B}\_{⊥}\right)\end{array}\right.$$

IV，相似的，

$$\left\{\begin{array}{c}E\_{∥}=g\_{∥}E\_{∥}^{'} \\\vec{E}\_{⊥}=g\_{⊥}\left(\vec{E}\_{⊥}^{'}-\vec{v}×\vec{B}\_{⊥}^{'}\right)\end{array}\right.$$

可解得：

$B\_{∥}^{'}=k\_{∥}B\_{∥}=k\_{∥}k\_{∥}B\_{∥}^{'}$, $k\_{∥}^{2}=1$, $k\_{∥}=\pm 1$ (物理上選擇正號，負不合理)

慢速 ( $\left|\vec{v}\right|$ 很小) 與靜止的磁鐵所生磁場應接近，不應跳躍性變化。

$E\_{∥}^{'}=g\_{∥}E\_{∥}=g\_{∥}g\_{∥}E\_{∥}^{'}$, $g\_{∥}^{2}=1$, $g\_{∥}=\pm 1$ (物理上選擇正號，負不合理)

得 $k\_{∥}=1$, $g\_{∥}=1$ 。

$\vec{B}\_{⊥}^{'}=k\_{⊥}\left(\vec{B}\_{⊥}-\frac{\vec{v}}{c^{2}}×\vec{E}\right)$

$ =k\_{⊥}\left(k\_{⊥}\left(\vec{B}\_{⊥}^{'}+\frac{\vec{v}}{c^{2}}×\vec{E}\_{⊥}^{'}\right)-\frac{\vec{v}}{c^{2}}×g\_{⊥}\left(\vec{E}\_{⊥}^{'}-\vec{v}×\vec{B}\_{⊥}^{'}\right)\right)$

$ =k\_{⊥}k\_{⊥}\vec{B}\_{⊥}^{'}+k\_{⊥}k\_{⊥}\frac{\vec{v}}{c^{2}}×\vec{E}\_{⊥}^{'}-k\_{⊥}g\_{⊥}\frac{\vec{v}}{c^{2}}×\vec{E}\_{⊥}^{'}+k\_{⊥}g\_{⊥}\frac{\vec{v}}{c^{2}}×\vec{v}×\vec{B}\_{⊥}^{'}$

$ =k\_{⊥}\left(k\_{⊥}-g\_{⊥}\frac{v^{2}}{c^{2}}\right)\vec{B}\_{⊥}^{'}+k\_{⊥}\left(k\_{⊥}-g\_{⊥}\right)\frac{\vec{v}}{c^{2}}×\vec{E}\_{⊥}^{'}$

得 $g\_{⊥}=k\_{⊥}$, $k\_{⊥}^{2}\left(1-\frac{v^{2}}{c^{2}}\right)=1$, $k\_{⊥}=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^{2}}{c^{2}}}}$ 。

整理如下：

**坐標系** $S^{'}$ **對於坐標系** $S$ **以相對速度** $\vec{v}$ **，**

$$\left\{\begin{array}{c}B\_{∥}^{'}=B\_{∥} \\\vec{B}\_{⊥}^{'}=\frac{\vec{B}\_{⊥}-\frac{\vec{v}}{c^{2}}×\vec{E}\_{⊥}}{\sqrt{1-\frac{v^{2}}{c^{2}}}}\\E\_{∥}^{'}=E\_{∥} \\\vec{E}\_{⊥}^{'}=\frac{\vec{E}\_{⊥}+\vec{v}×\vec{B}\_{⊥}}{\sqrt{1-\frac{v^{2}}{c^{2}}}} \end{array}\right.$$

**因此，我們得到了兩個慣性坐標系下相對運動的觀測者，其所見到電、磁場的一般關係。(表格 Table 26-4)**

**羅倫茲變換 Lorentz Transformation**

電荷在坐標系 $S$ 位於$\left(x=vt,y,z,t\right)$，

計算：永遠在電荷前面 $L$ ，坐標 $\left(x=vt+L,y=0,z=0,t\right)$ 的電場。

$$\vec{v}$$

$$vt$$

$$S$$

$$S^{'}$$

$$q$$

在坐標系 $S$ ， $E\_{x}\left(x=vt+L,y=0,z=0,t\right)=\frac{1}{4πϵ\_{0}}\frac{\frac{x-vt}{\sqrt{1-\frac{v^{2}}{c^{2}}}}}{\left(\frac{x-vt}{\sqrt{1-\frac{v^{2}}{c^{2}}}}\right)^{3}}=\frac{1}{4πϵ\_{0}}\frac{1}{\left(\frac{L}{\sqrt{1-\frac{v^{2}}{c^{2}}}}\right)^{2}}$

在坐標系 $S^{'}$ ，電荷為靜止。根據庫倫定律，應得 $E\_{x}^{'}=\frac{1}{4πϵ\_{0}}\frac{1}{x^{'}^{2}}$

又知道 $E\_{∥}^{'}=E\_{∥}$ ，因此 $E\_{x}^{'}=\frac{1}{4πϵ\_{0}}\frac{1}{\left(\frac{x-vt}{\sqrt{1-\frac{v^{2}}{c^{2}}}}\right)^{2}}$ 。

$L=x-vt$ 是運動中量到的長度，較其靜止長度為 $\frac{x-vt}{\sqrt{1-\frac{v^{2}}{c^{2}}}}$ 為短。

如此，得到 $x^{'}=\frac{x-vt}{\sqrt{1-\frac{v^{2}}{c^{2}}}}$，是為相對論中的**量尺縮短效應 (length contraction)** 。

計算：永遠在電荷上面 $L$ ，坐標 $\left(x=vt,y=0,z=L,t\right)$ 的電場。

在坐標系 $S$ ， $E\_{z}\left(x=vt,y=0,z=L,t\right)=\frac{1}{4πϵ\_{0}}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^{2}}{c^{2}}}}\frac{1}{z^{2}}$

在坐標系 $S^{'}$ ，電荷為靜止。應得 $E\_{z}^{'}=\frac{1}{4πϵ\_{0}}\frac{1}{z^{'}^{2}}$

又知道 $\vec{E}\_{⊥}^{'}=\frac{\vec{E}\_{⊥}+\vec{v}×\vec{B}\_{⊥}}{\sqrt{1-\frac{v^{2}}{c^{2}}}}$ ，因此 $E\_{z}^{'}=\frac{E\_{z}+\vec{v}×\vec{B}\_{y}}{\sqrt{1-\frac{v^{2}}{c^{2}}}}$ ，

$\vec{B}-\frac{\vec{v}}{c^{2}}×\vec{E}=0$, $B\_{y}=-\frac{v}{c^{2}}E\_{z}$, $E\_{z}^{'}=\frac{1-\frac{v^{2}}{c^{2}}}{\sqrt{1-\frac{v^{2}}{c^{2}}}}E\_{z}=\frac{1-\frac{v^{2}}{c^{2}}}{\sqrt{1-\frac{v^{2}}{c^{2}}}}\left(\frac{1}{4πϵ\_{0}}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^{2}}{c^{2}}}}\frac{1}{z^{2}}\right)=\frac{1}{4πϵ\_{0}}\frac{1}{z^{2}}$

如此，巧妙的消去因子，可得到 $z^{'}=z$ 。

一般性的，以 $S$ 表示 $S^{'}$，得到：

$x^{'}=\frac{x-vt}{\sqrt{1-\frac{v^{2}}{c^{2}}}}$, $y^{'}=y$, $z^{'}=z$

反過來看，以 $S^{'}$ 表示 $S$，相當於原來的情況速度變號：

$x=\frac{x^{'}+vt^{'}}{\sqrt{1-\frac{v^{2}}{c^{2}}}}$, $y=y^{'}$, $z=z^{'}$

可解出

$t^{'}=\frac{t-\frac{v}{c^{2}}x}{\sqrt{1-\frac{v^{2}}{c^{2}}}}$, $t=\frac{t^{'}+\frac{v}{c^{2}}x^{'}}{\sqrt{1-\frac{v^{2}}{c^{2}}}}$

思考：是否可用庫倫定律的辦法反推，量測距離。

這個重要的變換關係，告訴我們**兩個慣性坐標系下相對運動的觀測者，其所見到**座標的不同，稱為羅倫茲變換 (Lorentz Transform)

$\left\{\begin{array}{c}x^{'}=\frac{x-vt}{\sqrt{1-\frac{v^{2}}{c^{2}}}}\\y^{'}=y \\z^{'}=z \\t^{'}=\frac{t-\frac{v}{c^{2}}x}{\sqrt{1-\frac{v^{2}}{c^{2}}}}\end{array}\right.$***,*** $\left\{\begin{array}{c}x=\frac{x^{'}+vt^{'}}{\sqrt{1-\frac{v^{2}}{c^{2}}}} \\y=y^{'} \\z=z^{'} \\t=\frac{t^{'}+\frac{v}{c^{2}}x^{'}}{\sqrt{1-\frac{v^{2}}{c^{2}}}}\end{array}\right.$