**進階電磁學**

**課程筆記**

**第17-1講、Chapter 26**

**The Potentials and fields for a charge moving with constant velocity and Special theory of Relativity(1)**

授課教師：台灣大學物理系　易富國教授
筆記編寫：台灣大學物理系　曾芝寅助理
編者信箱：f01222076@ntu.edu.tw
上課學期：100學年度第一學期


本著作係採用[創用 CC 姓名標示-非商業性-相同方式分享 3.0 台灣 授權條款](http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/3.0/tw/deed.zh_TW)授權.

**教科書**

**Feynman Lecture on Physics, Vol. 2**

**Chapter 26. Lorentz Transformations of the Fields**

26-1 The four-potential of a moving charge

26-2 The fields of a point charge with a constant velocity

26-3 Relativistic transformation of the fields

26-4 The equation of motion in relativistic notation

**等速運動電荷產生的位勢**

等速運動電荷產生的場與位勢，表現出馬克斯威爾方程式中美好的特性：

* **規範不變性** (Gauge Invariance)
* 特殊相對論的**相對性原理** (Lorentz Covariance)

$\vec{r}\_{2}\left(t\right)$ 處有一個沿 $x$ 軸作等速直線運動 $\vec{v}=v\vec{e\_{x}}$ 之電荷 $q$

$\vec{r}\_{2}\left(t\right)=vt\vec{e\_{x}}$, $t\_{R}=t-\frac{\left|\vec{R}\right|}{c}$, $\vec{R}=\vec{r}\_{1}\left(t\right)-\vec{r}\_{2}\left(t\_{R}\right)$

$$\vec{R}$$

$$q$$

$$\vec{v}$$

$$\vec{r}\_{2}\left(t\_{R}\right) $$

$$1\left(x,y,z,t\right)$$

$$O$$

$$\vec{r}\_{1}\left(t\right) $$

$$α$$

根據21.6節 (上一講)，計算過 Liénard and Wiechert potential

$$\left\{\begin{array}{c}ϕ\left(x,y,z,t\right)=\frac{q}{4πϵ\_{0}} \frac{1}{\left|\vec{R}\right|\left(1-\frac{\vec{R}∙\vec{v}\left(t\_{R}\right)}{\left|\vec{R}\right|c}\right)}\\A\_{x}\left(x,y,z,t\right)=\frac{qv}{4πϵ\_{0}c^{2}}\frac{1}{\left|\vec{R}\right|\left(1-\frac{\vec{R}∙\vec{v}\left(t\_{R}\right)}{\left|\vec{R}\right|c}\right)}\end{array}\right.$$

以下將進行推導。

首先計算遲滯時間的量：

$c\left(t-t\_{R}\right)=\left|\vec{R}\right|$

$⇒ c^{2}\left(t-t\_{R}\right)^{2}=\left(x-vt\_{R}\right)^{2}+\left(y-0\right)^{2}+\left(z-0\right)^{2}$

$⇒ c^{2}t^{2}+c^{2}t\_{R}^{2}-2c^{2}tt\_{R}=x^{2}+v^{2}t\_{R}^{2}-2xvt\_{R}+y^{2}+z^{2}$

$⇒ \left(c^{2}-v^{2}\right)t\_{R}^{2}-2c^{2}\left(t-\frac{vx}{c^{2}}\right)t\_{R}+\left(c^{2}t^{2}-x^{2}-y^{2}-z^{2}\right)=0$

$⇒ t\_{R}=\frac{c^{2}\left(t-\frac{vx}{c^{2}}\right)\pm \sqrt{c^{4}\left(t-\frac{vx}{c^{2}}\right)^{2}-\left(c^{2}-v^{2}\right)\left(c^{2}t^{2}-x^{2}-y^{2}-z^{2}\right)}}{c^{2}-v^{2}}$

$ =\frac{c^{2}\left(t-\frac{vx}{c^{2}}\right)\pm \sqrt{c^{2}\left(x-vt\right)^{2}+\left(c^{2}-v^{2}\right)\left(y^{2}+z^{2}\right)}}{c^{2}-v^{2}}$

接著令 $s=\left|\vec{R}\right|\left(1-\frac{\vec{R}∙\vec{v}\left(t\_{R}\right)}{\left|\vec{R}\right|c}\right)$ ，

$cs=c\left|\vec{R}\right|-\vec{R}∙\vec{v}\left(t\_{R}\right)=c^{2}\left(t-t\_{R}\right)-c\left(t-t\_{R}\right)v\cos(α)$

其中 $\cos(α)=\frac{x-vt\_{R}}{c\left(t-t\_{R}\right)}$ ，見上圖。

$ =c^{2}\left(t-t\_{R}\right)-v\left(x-vt\_{R}\right)=\left(v^{2}-c^{2}\right)t\_{R}+c^{2}\left(t-\frac{vx}{c^{2}}\right)$

帶入 $t\_{R}$ 的值。 $s$ 應為正，故根號前取負值。

$cs=\sqrt{c^{2}\left(x-vt\right)^{2}+\left(c^{2}-v^{2}\right)\left(y^{2}+z^{2}\right)}$

$s=\sqrt{\left(x-vt\right)^{2}+\left(1-\frac{v^{2}}{c^{2}}\right)\left(y^{2}+z^{2}\right)}=\sqrt{\left(1-\frac{v^{2}}{c^{2}}\right)}\sqrt{\left(\frac{x-vt}{\sqrt{\left(1-\frac{v^{2}}{c^{2}}\right)}}\right)^{2}+\left(y^{2}+z^{2}\right)}$

得到位勢：

$ϕ\left(x,y,z,t\right)=\frac{q}{4πϵ\_{0}}\frac{1}{s}=\frac{q}{4πϵ\_{0}}\frac{1}{\sqrt{\left(1-\frac{v^{2}}{c^{2}}\right)}\sqrt{\left(\frac{x-vt}{\sqrt{\left(1-\frac{v^{2}}{c^{2}}\right)}}\right)^{2}+\left(y^{2}+z^{2}\right)}}$

$A\_{x}\left(x,y,z,t\right)=\frac{v}{c^{2}}ϕ$；$A\_{y}=0$；$A\_{z}=0$

$$q$$

$$vt\_{R}$$

$$1$$

$$α$$

$$O$$

$$\left|\vec{R}\right|=c\left(t-t\_{R}\right)$$

$$\vec{R}\_{1}$$

$$\vec{R}\_{0}$$

$$v\left(t-t\_{R}\right)=\left|\vec{R}\_{0}\right|$$

$$vt$$

$$s$$

$$θ$$

$$\frac{\left|\vec{R}\_{0}\right|}{\left|\vec{R}\right|}=\frac{v\left(t-t\_{R}\right)}{c\left(t-t\_{R}\right)}=\frac{v}{c}$$

$s=\left|\vec{R}\right|\left(1-\frac{v\cos(α)}{c}\right)=\left|\vec{R}\right|-\left|\vec{R}\_{0}\right|\cos(α)$

根據餘弦定理， $\left|\vec{R}\_{1}\right|^{2}=\left|\vec{R}\right|^{2}+\left|\vec{R}\_{0}\right|^{2}-2\left|\vec{R}\right|\left|\vec{R}\_{0}\right|\cos(α)$ ，

再根據正弦定理， $\frac{\sin(α)}{\left|\vec{R}\_{1}\right|}=\frac{\sin(θ)}{\left|\vec{R}\right|}=\frac{v}{c}\frac{\sin(θ)}{\left|\vec{R}\_{0}\right|}$ ，得一個由當下電荷位置 ($\vec{R}\_{1}$**,**$θ$) 的表示

$$s^{2}=\left|\vec{R}\_{1}\right|^{2}-\left|\vec{R}\_{0}\right|^{2}sin^{2}α=\left|\vec{R}\_{1}\right|^{2}\left(1-\frac{v^{2}}{c^{2}}sin^{2}θ\right)$$

(方法二) 一等速直線運動之電荷 $q$ ，其座標 $x\_{0}\left(t\right)=vt$, $y\_{0}\left(t\right)=0$, $z\_{0}\left(t\right)=0$

$$∇^{2}ϕ-\frac{1}{c^{2}}\frac{∂^{2}ϕ}{∂t^{2}}=\frac{-ρ}{ϵ\_{0}}=-\frac{q}{ϵ\_{0}}δ\left(x-x\_{0}\left(t\right)\right)δ\left(y\right)δ\left(z\right)$$

首先，變數代換 $\hat{x}=\left(x-vt\right)$，

$ϕ\left(x,y,z,t\right)= \hat{ϕ}\left(x-vt,y,z,t\right)$，平移不變性。

$\frac{∂ϕ}{∂x}=\frac{∂\hat{ϕ}}{∂\hat{x}}\frac{∂\hat{x}}{∂x}=\frac{∂\hat{ϕ}}{∂\hat{x}}$, $\frac{∂^{2}ϕ}{∂x^{2}}=\frac{∂^{2}\hat{ϕ}}{∂\hat{x}^{2}}$

$\frac{∂ϕ}{∂t}=\frac{∂\hat{ϕ}}{∂\hat{x}}\frac{∂\hat{x}}{∂t}=\left(-v\right)\frac{∂\hat{ϕ}}{∂\hat{x}}$, $\frac{∂^{2}ϕ}{∂t^{2}}=v^{2}\frac{∂^{2}\hat{ϕ}}{∂\hat{x}^{2}}$ ，得

$$\left[\left(1-\frac{v^{2}}{c^{2}}\right)\frac{∂^{2}}{∂\hat{x}^{2}}+\frac{∂^{2}}{∂y^{2}}+\frac{∂^{2}}{∂z^{2}}\right]\hat{ϕ}=-\frac{q}{ϵ\_{0}}δ\left(\hat{x}\right)δ\left(y\right)δ\left(z\right)$$

再變數代換，令 $η=\frac{\hat{x}}{\sqrt{\left(1-\frac{v^{2}}{c^{2}}\right)}}$ ，得到 Poisson’s equation

$$\left[\frac{∂^{2}}{∂η^{2}}+\frac{∂^{2}}{∂y^{2}}+\frac{∂^{2}}{∂z^{2}}\right]\hat{ϕ}=-\frac{q}{ϵ\_{0}}δ\left(η\sqrt{\left(1-\frac{v^{2}}{c^{2}}\right)}\right)δ\left(y\right)δ\left(z\right)$$

利用靜電學的知識，有解 $\hat{ϕ}\left(η,y,z\right)=\frac{q}{4πϵ\_{0}}\frac{1}{\sqrt{\left(1-\frac{v^{2}}{c^{2}}\right)}}\frac{1}{\sqrt{η^{2}+y^{2}+z^{2}}}$

請特別注意 $δ$ 函數的積分變換。

帶回原變數，

$$ϕ\left(x,y,z\right)=\hat{ϕ}\left(η,y,z\right)=\frac{q}{4πϵ\_{0}}\frac{1}{\sqrt{\left(1-\frac{v^{2}}{c^{2}}\right)}}\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{x-vt}{\sqrt{\left(1-\frac{v^{2}}{c^{2}}\right)}}\right)^{2}+y^{2}+z^{2}}}$$

另外，電流密度 $J\_{x}=qvδ\left(\hat{x}\right)δ\left(y\right)δ\left(z\right)$, $J\_{y}=0$, $J\_{z}=0$

相似地，得

$$A\_{x}=\frac{qv}{4πϵ\_{0}c^{2}}\frac{1}{\sqrt{\left(1-\frac{v^{2}}{c^{2}}\right)}}\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{x-vt}{\sqrt{\left(1-\frac{v^{2}}{c^{2}}\right)}}\right)^{2}+y^{2}+z^{2}}}=\frac{v}{c^{2}}ϕ$$

；$A\_{y}=0$；$A\_{z}=0$

1887年，Heaviside已解出。

接著我們可利用位勢計算電、磁場。

**等速運動電荷產生的場**

電場的計算

$$\vec{E}\left(x,y,z,t\right)=-\frac{∂\vec{A}}{∂t}-\vec{∇}ϕ$$

$E\_{x}=-\frac{∂A\_{x}}{∂t}-\frac{∂ϕ}{∂x}$

$=-\frac{q}{4πϵ\_{0}}\left\{\frac{\frac{v}{c^{2}}}{\sqrt{1-\frac{v^{2}}{c^{2}}}}\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-2v\right)\left(x-vt\right)}{\left(\left(\frac{x-vt}{\sqrt{\left(1-\frac{v^{2}}{c^{2}}\right)}}\right)^{2}+y^{2}+z^{2}\right)^{\frac{3}{2}}}\frac{1}{\left(1-\frac{v^{2}}{c^{2}}\right)}+\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^{2}}{c^{2}}}}\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(2\right)\left(x-vt\right)}{\left(\left(\frac{x-vt}{\sqrt{\left(1-\frac{v^{2}}{c^{2}}\right)}}\right)^{2}+y^{2}+z^{2}\right)^{\frac{3}{2}}}\frac{1}{\left(1-\frac{v^{2}}{c^{2}}\right)}\right\}$

$$=\frac{q}{4πϵ\_{0}}\frac{\left(x-vt\right)}{s^{3}}\left(1-\frac{v^{2}}{c^{2}}\right)$$

$E\_{y}=-\frac{∂A\_{y}}{∂t}-\frac{∂ϕ}{∂y}=-\frac{q}{4πϵ\_{0}}\left\{0+\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^{2}}{c^{2}}}}\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)2y}{\left(\left(\frac{x-vt}{\sqrt{\left(1-\frac{v^{2}}{c^{2}}\right)}}\right)^{2}+y^{2}+z^{2}\right)^{\frac{3}{2}}}\right\}=\frac{q}{4πϵ\_{0}}\frac{y}{s^{3}}\left(1-\frac{v^{2}}{c^{2}}\right)$

$E\_{z}=-\frac{∂A\_{z}}{∂t}-\frac{∂ϕ}{∂z}=-\frac{q}{4πϵ\_{0}}\left\{0+\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^{2}}{c^{2}}}}\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)2z}{\left(\left(\frac{x-vt}{\sqrt{\left(1-\frac{v^{2}}{c^{2}}\right)}}\right)^{2}+y^{2}+z^{2}\right)^{\frac{3}{2}}}\right\}=\frac{q}{4πϵ\_{0}}\frac{z}{s^{3}}\left(1-\frac{v^{2}}{c^{2}}\right)$

注意： $\vec{E}∥\left(x-vt\right)\vec{e\_{x}}+y\vec{e\_{y}}+z\vec{e\_{z}}=\left|\vec{R}\_{1}\right|$

$$\vec{E}=\frac{q}{4πϵ\_{0}}\frac{\left(1-\frac{v^{2}}{c^{2}}\right)}{s^{3}}\vec{R}\_{1}=\frac{q}{4πϵ\_{0}}\frac{\vec{R}\_{1}\left(1-\frac{v^{2}}{c^{2}}\right)}{\left|\vec{R}\_{1}\right|^{3}\left\{1-\frac{v^{2}}{c^{2}}sin^{2}θ\right\}^{\frac{3}{2}} }$$

電場的指向朝著電荷當下的位置，而非遲滯時間的位置。

從 $θ$ 的關係，知道此電場強弱依照方向而不同：

垂直運動方向最強，平行運動方向最弱。

磁場的計算

$$\vec{B}\left(x,y,z,t\right)=\vec{∇}×\vec{A}=\left|\begin{matrix}\vec{e\_{x}}&\vec{e\_{y}}&\vec{e\_{z}}\\\frac{∂}{∂x}&\frac{∂}{∂y}&\frac{∂}{∂z}\\A\_{x}&0&0\end{matrix}\right|$$

$B\_{x}=0=\left(\frac{\vec{v}}{c^{2}}×\vec{E}\right)\_{x}$ ，最後一個等號是後見之明。

$B\_{y}=\frac{∂A\_{x}}{∂z}-0=\frac{q}{4πϵ\_{0}}\frac{v}{c^{2}}\left\{\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^{2}}{c^{2}}}}\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)2z}{\left(\left(\frac{x-vt}{\sqrt{\left(1-\frac{v^{2}}{c^{2}}\right)}}\right)^{2}+y^{2}+z^{2}\right)^{\frac{3}{2}}}\right\}=\left(\frac{\vec{v}}{c^{2}}×\vec{E}\right)\_{y}$

$B\_{z}=0-\frac{∂A\_{x}}{∂y}=-\frac{q}{4πϵ\_{0}}\frac{v}{c^{2}}\left\{\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^{2}}{c^{2}}}}\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)2y}{\left(\left(\frac{x-vt}{\sqrt{\left(1-\frac{v^{2}}{c^{2}}\right)}}\right)^{2}+y^{2}+z^{2}\right)^{\frac{3}{2}}}\right\}=\left(\frac{\vec{v}}{c^{2}}×\vec{E}\right)\_{z}$

有 $\vec{B}=\left(\frac{\vec{v}}{c^{2}}×\vec{E}\right)$ ，

此式是來自安培-馬克斯威爾定律 $\vec{∇}×\vec{B}=\frac{1}{c^{2}}\frac{∂\vec{E}}{∂t}+\frac{1}{c^{2}ϵ\_{0}}\vec{J}$

$$\vec{E}$$

$$\vec{B}$$

$$\vec{v}∥\vec{e\_{x}}$$

另外， $\vec{B}-\left(\frac{\vec{v}}{c^{2}}×\vec{E}\right)=\vec{0}$ ，此式有更深刻的意義，請見下一講。