**進階電磁學**

**課程筆記**

**第15-3講、**

**Maxwell Equations (3)**

授課教師：台灣大學物理系　易富國教授
筆記編寫：台灣大學物理系　曾芝寅助理
編者信箱：r01222076@ntu.edu.tw
上課學期：100學年度第一學期


本著作係採用[創用 CC 姓名標示-非商業性-相同方式分享 3.0 台灣 授權條款](http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/3.0/tw/deed.zh_TW)授權.

**求解馬克士威爾方程式；勢與波動方程式**

**Solving Maxwell’s Equations; the Potentials and the Wave Equation**

上回證明了平板的例子，以下做一般性的求解。

向量勢 (vector potential) $\vec{A}$

磁場高斯定律 $\vec{∇}∙\vec{B}=0 ⇒ \vec{∇}×\vec{A}=\vec{B}$

純量勢 (scalar potential) $ϕ$

法拉第感應定律 $\vec{∇}×\vec{E}=-\frac{∂\vec{B}}{∂t}=-\frac{∂}{∂t}\vec{∇}×\vec{A}=\vec{∇}×\left(-\frac{∂\vec{A}}{∂t}\right)$

$$\vec{∇}×\left(\vec{E}+\frac{∂\vec{A}}{∂t}\right)=0 ⇒ -\vec{∇}ϕ=\vec{E}+\frac{∂\vec{A}}{∂t} ⇒ \vec{E}=-\frac{∂\vec{A}}{∂t}-\vec{∇}ϕ$$

電磁場以勢的形式表示：$\left\{\begin{array}{c}\vec{B}=\vec{∇}×\vec{A} \\\vec{E}=-\frac{∂\vec{A}}{∂t}-\vec{∇}ϕ\end{array}\right.$

高斯定律 $\frac{ρ}{ϵ\_{0}}=\vec{∇}∙\vec{E}=\vec{∇}∙\left(-\frac{∂\vec{A}}{∂t}-\vec{∇}ϕ\right)=-\frac{∂}{∂t}\vec{∇}∙\vec{A}-∇^{2}ϕ$

安培-馬克斯威爾定律 $\frac{1}{c^{2}ϵ\_{0}}\vec{J}=\vec{∇}×\vec{B}-\frac{1}{c^{2}}\frac{∂\vec{E}}{∂t}=\frac{1}{c^{2}}\frac{∂}{∂t}\frac{∂\vec{A}}{∂t}+\vec{∇}\left(\frac{1}{c^{2}}\frac{∂ϕ}{∂t}+\vec{∇}∙\vec{A}\right)-∇^{2}\vec{A}$

磁場部分 $\vec{∇}×\vec{B}=\vec{∇}×\left(\vec{∇}×\vec{A}\right)=\vec{∇}\left(\vec{∇}∙\vec{A}\right)-∇^{2}\vec{A}$

電場部分 $-\frac{1}{c^{2}}\frac{∂\vec{E}}{∂t}=\frac{1}{c^{2}}\frac{∂}{∂t}\frac{∂\vec{A}}{∂t}+\vec{∇}\left(\frac{1}{c^{2}}\frac{∂ϕ}{∂t}\right)$

**注意：** $∇^{2}\vec{A}$ **的意義在直角正交坐標系 (Cartesian coordinates) 才明朗。**

**規範變換 (Gauge transformation)**

對於向量勢 $\vec{A}$ ，磁場 $\vec{B}=\vec{∇}×\vec{A}=\vec{∇}×\vec{A}\_{Λ}=\vec{∇}×\left(\vec{A}+\vec{∇}Λ\right)$

保證變換自由度：

$$\vec{A}\rightarrow \vec{A}\_{Λ}=\vec{A}+\vec{∇}Λ\left(\vec{x},t\right)$$

又根據電場的條件 $\vec{∇}×\vec{E}=-\frac{∂\vec{B}}{∂t}=-\vec{∇}×\frac{∂}{∂t}\left(\vec{A}+\vec{∇}Λ\right)$

$\vec{∇}×\left[\vec{E}+\frac{∂}{∂t}\left(\vec{A}+\vec{∇}Λ\right)\right]=0$

$\vec{E}+\frac{∂}{∂t}\left(\vec{A}+\vec{∇}Λ\right)=\vec{E}+\frac{∂\vec{A}\_{Λ}}{∂t}=-\vec{∇}ϕ\_{Λ}=-\vec{∇}\left(ϕ-\frac{∂}{∂t}Λ\right)$

純量勢相應變換

$$ ϕ\rightarrow ϕ\_{Λ}= ϕ-\frac{∂}{∂t}Λ\left(\vec{x},t\right)$$

**Lorenz gauge and d'Alembert’s equation**

**將規範自由度選擇為** $\frac{1}{c^{2}}\frac{∂ϕ\_{Λ}}{∂t}+\vec{∇}∙\vec{A}\_{Λ}=0$ ，稱作 **Lorenz gauge**。(此Lorenz非彼Lorentz transformation中的 Lorentz)

安培-馬克斯威爾定律立刻寫成：

$$\frac{1}{c^{2}ϵ\_{0}}\vec{J}=\frac{1}{c^{2}}\frac{∂}{∂t}\frac{∂\vec{A}\_{Λ}}{∂t}-∇^{2}\vec{A}\_{Λ}$$

接著利用高斯定律：

$$\frac{ρ}{ϵ\_{0}}=\vec{∇}∙\vec{E}=-\frac{∂}{∂t}\left(\vec{∇}∙\vec{A}\_{Λ}\right)-∇^{2}ϕ\_{Λ}=\frac{1}{c^{2}}\frac{∂}{∂t}\frac{∂ϕ\_{Λ}}{∂t}-∇^{2}ϕ\_{Λ}$$

最終，我們得到一組四個(有場源的)波動方程式，形式對稱：

$$\left\{\begin{array}{c}\frac{1}{c^{2}ϵ\_{0}}\vec{J}=\frac{1}{c^{2}}\frac{∂}{∂t}\frac{∂\vec{A}\_{Λ}}{∂t}-∇^{2}\vec{A}\_{Λ}\\ \frac{1}{ϵ\_{0}}ρ=\frac{1}{c^{2}}\frac{∂}{∂t}\frac{∂ϕ\_{Λ}}{∂t}-∇^{2}ϕ\_{Λ}\end{array}\right.$$

稱作達蘭貝爾方程式 (d'Alembert’s equation)。