**進階電磁學**

**課程筆記**

**第24-2講、**

**Radiation field of an arbitrarily moving point charge**

授課教師：台灣大學物理系　易富國教授
筆記編寫：台灣大學物理系　曾芝寅助理
編者信箱：f01222076@ntu.edu.tw
上課學期：100學年度第一學期


本著作係採用[創用 CC 姓名標示-非商業性-相同方式分享 3.0 台灣 授權條款](http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/3.0/tw/deed.zh_TW)授權.

**再訪 Lienard-Wiechert Potential**

藉著相對論的四向量辦法，再做一次 Lienard-Wiechert Potential

$$vt$$

$$O$$

$$O^{'}$$

$$\vec{u}$$

$$Q$$

$$P\left(\vec{r}\_{1},t\right)$$

$$\vec{r}\_{2}\left(t\_{r}\right),t\_{r}$$

電荷以速度 $\vec{u}=\left(u\_{x},u\_{y}=0,u\_{z}=0\right)$ 運動。

兩坐標系以相對速度 $\vec{v}$ 運動。選擇 $\vec{v}=u\_{x}\vec{e\_{x}}$，而有 $\vec{u}^{'}=\vec{0}$ 。

坐標系 $O^{'}$ 中，四向量勢 $A\_{μ}^{'}=\left(\frac{ϕ^{'}}{c},\vec{A}^{'}=\vec{0}\right)$

$c\left(t-t\_{r}\right)=\vec{r}\_{1}-\vec{r}\_{2}\left(t\_{r}\right)$ ，兩點距離四向量化：

$R\_{μ}=\left[c\left(t-t\_{r}\right),\vec{R}=\vec{r}\_{1}-\vec{r}\_{2}\left(t\_{r}\right)\right]$ ，是類光的時空距離，$R\_{μ}R\_{μ}=0$

$R\_{μ}^{'}=\left[c\left(t^{'}-t\_{r}^{'}\right),\vec{R}^{'}=\vec{r}\_{1}^{'}-\vec{r}\_{2}^{'}\left(t\_{r}^{'}\right)\right]$ ，當然也是類光的，$R\_{μ}^{'}R\_{μ}^{'}=0$

 $u\_{μ}=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{\vec{u}∙\vec{u}}{c^{2}}}}\left(1,\frac{\vec{u}}{c}\right)$ ， $u\_{μ}^{'}=\left(1,\vec{0}\right)$ ，符合恆等式 $u\_{μ}u\_{μ}=1=u\_{μ}^{'}u\_{μ}^{'}$

$A\_{μ}^{'}=\left(\frac{1}{c}\frac{Q}{4πϵ\_{0}}\frac{1}{\left|\vec{R}^{'}\right|},\vec{0}\right)=\left(\frac{Q}{4πϵ\_{0}c}\frac{1}{c\left(t^{'}-t\_{r}^{'}\right)},\vec{0}\right)=\left(\frac{Q}{4πϵ\_{0}c}\frac{1}{R\_{ν}^{'}u\_{ν}^{'}},\vec{0}\right)$

可寫成 $A\_{μ}^{'}=\frac{Q}{4πϵ\_{0}c}\frac{1}{R\_{ν}^{'}u\_{ν}^{'}}u\_{μ}^{'}$ 的形式，有利於變換回坐標系 $O$

座標變換下，四向量方程式形式不變：

$\left(\frac{ϕ}{c},\vec{A}\right)=A\_{μ}=\frac{Q}{4πϵ\_{0}c}\frac{1}{R\_{ν}u\_{ν}}u\_{μ}$

$ =\frac{Q}{4πϵ\_{0}c}\frac{1}{\frac{1}{\sqrt{1-\frac{\vec{u}∙\vec{u}}{c^{2}}}}\left[c\left(t-t\_{r}\right)∙1-\vec{R}∙\frac{\vec{u}}{c}\right]}\frac{\left(1,\frac{\vec{u}}{c}\right)}{\sqrt{1-\frac{\vec{u}∙\vec{u}}{c^{2}}}}=\frac{Q}{4πϵ\_{0}c}\frac{\left(1,\frac{\vec{u}}{c}\right)}{\left|\vec{R}\right|\left(1-\frac{\vec{e}\_{\vec{R}}∙\vec{u}}{c}\right)}$

$\left\{\begin{array}{c}ϕ=\frac{Q}{4πϵ\_{0}}\frac{1}{\left|\vec{R}\right|\left(1-\vec{e}\_{\vec{R}}∙\frac{\vec{u}}{c}\right)} \\\vec{A}=\frac{Q}{4πϵ\_{0}c}\frac{1}{\left|\vec{R}\right|\left[1-\vec{e}\_{\vec{R}}∙\frac{\vec{u}}{c}\right]}\frac{\vec{u}}{c}\end{array}\right.$ **，Lienard-Wiechert Potential**

藉著相對論的四向量座標變換辦法，簡潔的得出Lienard-Wiechert Potential。

**Heaviside-Feynman Formula**

這個公式的推導是電磁學裡頭相當困難的部分，道理卻相當簡單。

有了向量勢，我們便能利用微分求得電、磁場。

以下我們改變符號 $\vec{u}\left(t\_{r}\right)⇒\vec{v}\left(t\_{r}\right)$ 。

令 $s=\left|\vec{R}\right|\left[1-\vec{e}\_{\vec{R}}∙\frac{\vec{v}\left(t\_{r}\right)}{c}\right]$

電場 $\vec{E}=-\frac{∂\vec{A}}{∂t}-\vec{∇}ϕ$ ，帶入Lienard-Wiechert Potential得：

$-\frac{4πϵ\_{0}c^{2}}{Q}\vec{E}=\frac{∂}{∂t}\left(\frac{\vec{v}\left(t\_{r}\right)}{s}\right)+c^{2}\vec{∇}\left(\frac{1}{s}\right)$

第一項 $\frac{∂}{∂t}\left(\frac{\vec{v}\left(t\_{r}\right)}{s}\right)=\frac{∂t\_{r}}{∂t}\frac{∂}{∂t\_{r}}\left(\frac{\vec{v}\left(t\_{r}\right)}{s}\right)=\frac{∂t\_{r}}{∂t}\left(\frac{\vec{a}\left(t\_{r}\right)}{s}-\frac{\vec{v}\left(t\_{r}\right)}{s^{2}}\frac{∂s}{∂t\_{r}}\right)$

求 $\frac{∂t\_{r}}{∂t}$ ，有 $c\left(t-t\_{r}\right)=\left|\vec{r}\_{1}-\vec{r}\_{2}\left(t\_{r}\right)\right|=\left|\vec{R}\right|$,

$c\left(\frac{∂t}{∂t\_{r}}-1\right)=\frac{∂\left|\vec{R}\right|}{∂t\_{r}}=\frac{∂\sqrt{\left|\vec{R}\right|^{2}}}{∂t\_{r}} =\frac{1}{2}\frac{2\vec{R}∙\left(-\vec{v}\left(t\_{r}\right)\right)}{\left|\vec{R}\right|}=-\vec{e}\_{\vec{R}}∙\vec{v}\left(t\_{r}\right)$

得 $\frac{∂t\_{r}}{∂t}=\frac{1}{1-\vec{e}\_{\vec{R}}∙\frac{\vec{v}\left(t\_{r}\right)}{c}}=\frac{\left|\vec{R}\right|}{s}$

求 $\frac{∂s}{∂t\_{r}}$ ，有 $s=\left|\vec{R}\right|\left[1-\vec{e}\_{\vec{R}}∙\frac{\vec{v}\left(t\_{r}\right)}{c}\right]=c\left(t-t\_{r}\right)-\vec{R}∙\frac{\vec{v}\left(t\_{r}\right)}{c}$,

$\frac{∂s}{∂t\_{r}}=c\left(\frac{∂t}{∂t\_{r}}-1\right)-\vec{R}∙\frac{\vec{a}\left(t\_{r}\right)}{c}-\frac{∂\vec{R}}{∂t\_{r}}∙\frac{\vec{v}\left(t\_{r}\right)}{c}$

又有 $\frac{∂\vec{R}}{∂t\_{r}}=\frac{∂}{∂t\_{r}}\left(x\_{1}-x\_{2}\left(t\_{r}\right),y\_{1}-y\_{2}\left(t\_{r}\right),z\_{1}-z\_{2}\left(t\_{r}\right)\right)=-\vec{v}\left(t\_{r}\right)$

得 $\frac{∂s}{∂t\_{r}}=-\vec{e}\_{\vec{R}}∙\vec{v}\left(t\_{r}\right)-\frac{\vec{R}∙\vec{a}\left(t\_{r}\right)}{c}+\frac{\vec{v}\left(t\_{r}\right)∙\vec{v}\left(t\_{r}\right)}{c}$

得第一項 $\frac{∂}{∂t}\frac{\vec{v}\left(t\_{r}\right)}{s}=\frac{\left|\vec{R}\right|}{s}\left(\frac{\vec{a}\left(t\_{r}\right)}{s}+\frac{\vec{v}\left(t\_{r}\right)}{s^{2}}\left(\vec{e}\_{\vec{R}}∙\vec{v}\left(t\_{r}\right)+\frac{\vec{R}∙\vec{a}\left(t\_{r}\right)}{c}-\frac{\vec{v}\left(t\_{r}\right)∙\vec{v}\left(t\_{r}\right)}{c}\right)\right)$.

第二項 $c^{2}\vec{∇}\left(\frac{1}{s}\right)=-\frac{c^{2}}{s^{2}}\vec{∇}s=-\frac{c^{2}}{s^{2}}\left(\vec{∇}\_{t\_{r}=const.}s+\frac{∂s}{∂t\_{r}}\vec{∇}t\_{r}\right)$

求 $\vec{∇}\_{t\_{r}=const.}s$

$s=\sqrt{\left(x\_{1}-x\_{2}\left(t\_{r}\right)\right)^{2},\left(y\_{1}-y\_{2}\left(t\_{r}\right)\right)^{2},\left(z\_{1}-z\_{2}\left(t\_{r}\right)\right)^{2}}-\frac{\vec{R}∙\vec{v}\left(t\_{r}\right)}{c}$

得 $\vec{∇}\_{t\_{r}=const.}s=\vec{e}\_{\vec{R}}-\frac{\vec{v}\left(t\_{r}\right)}{c}$

求 $\vec{∇}t\_{r}=\vec{∇}\left(t-\frac{\left|\vec{R}\right|}{c}\right)=-\frac{1}{c}\vec{∇}\left|\vec{R}\right|=-\frac{1}{c}\left(\vec{e}\_{\vec{R}}+\frac{∂\left|\vec{R}\right|}{∂t\_{r}}\vec{∇}t\_{r}\right)=-\frac{1}{c}\left(\vec{e}\_{\vec{R}}-\vec{e}\_{\vec{R}}∙\vec{v}\left(t\_{r}\right)\vec{∇}t\_{r}\right)$得到遞迴關係，移項得 $\left(1-\vec{e}\_{\vec{R}}∙\frac{\vec{v}\left(t\_{r}\right)}{c}\right)\vec{∇}t\_{r}=-\frac{\vec{e}\_{\vec{R}}}{c}$

得 $\vec{∇}t\_{r}=-\frac{\vec{R}}{cs}$

得第二項 $c^{2}\vec{∇}\left(\frac{1}{s}\right)=-\frac{c^{2}}{s^{2}}\left(\vec{e}\_{\vec{R}}-\frac{\vec{v}\left(t\_{r}\right)}{c}+\left(\vec{e}\_{\vec{R}}∙\vec{v}\left(t\_{r}\right)+\vec{R}∙\frac{\vec{a}\left(t\_{r}\right)}{c}-\frac{\vec{v}\left(t\_{r}\right)∙\vec{v}\left(t\_{r}\right)}{c}\right)\frac{\vec{R}}{cs}\right)$

將以上結果帶回：

$-\frac{4πϵ\_{0}c^{2}}{Q}\vec{E}=\frac{\left|\vec{R}\right|}{s}\left(\frac{\vec{a}\left(t\_{r}\right)}{s}+\frac{\vec{v}\left(t\_{r}\right)}{s^{2}}\left(\vec{e}\_{\vec{R}}∙\vec{v}\left(t\_{r}\right)+\vec{R}∙\frac{\vec{a}\left(t\_{r}\right)}{c}-\frac{\vec{v}\left(t\_{r}\right)∙\vec{v}\left(t\_{r}\right)}{c}\right)\right)-\frac{c^{2}}{s^{2}}\left(\vec{e}\_{\vec{R}}-\frac{\vec{v}\left(t\_{r}\right)}{c}+\frac{\vec{R}}{cs}\left(\vec{e}\_{\vec{R}}∙\vec{v}\left(t\_{r}\right)+\vec{R}∙\frac{\vec{a}\left(t\_{r}\right)}{c}-\frac{\vec{v}\left(t\_{r}\right)∙\vec{v}\left(t\_{r}\right)}{c}\right)\right)$

$=\frac{\left|\vec{R}\right|}{s^{2}}\vec{a}\left(t\_{r}\right)+\left(\frac{\left|\vec{R}\right|}{s}\frac{\vec{v}\left(t\_{r}\right)}{s^{2}}-\frac{c\vec{R}}{s^{3}}\right)\left(\vec{e}\_{\vec{R}}∙\vec{v}\left(t\_{r}\right)+\vec{R}∙\frac{\vec{a}\left(t\_{r}\right)}{c}-\frac{\vec{v}\left(t\_{r}\right)∙\vec{v}\left(t\_{r}\right)}{c}\right)-\frac{c^{2}}{s^{2}}\left(\vec{e}\_{\vec{R}}-\frac{\vec{v}\left(t\_{r}\right)}{c}\right)$

$=\frac{\left|\vec{R}\right|}{s^{2}}\vec{a}\left(t\_{r}\right)+\left(\vec{e}\_{\vec{R}}-\frac{\vec{v}\left(t\_{r}\right)}{c}\right)\left[-\frac{c\left|\vec{R}\right|}{s^{3}}\left(\vec{e}\_{\vec{R}}∙\vec{v}\left(t\_{r}\right)+\vec{R}∙\frac{\vec{a}\left(t\_{r}\right)}{c}-\frac{\left|\vec{v}\left(t\_{r}\right)\right|^{2}}{c} \right)-\frac{c^{2}}{s^{2}}\right]$

$=\frac{\left|\vec{R}\right|}{s^{2}}\vec{a}\left(t\_{r}\right)+\left(\vec{e}\_{\vec{R}}-\frac{\vec{v}\left(t\_{r}\right)}{c}\right)\left[-\frac{c^{2}\left|\vec{R}\right|}{s^{3}}\left(\vec{e}\_{\vec{R}}∙\frac{\vec{v}\left(t\_{r}\right)}{c}+\frac{\vec{R}∙\vec{a}\left(t\_{r}\right)}{c^{2}}-\frac{\left|\vec{v}\left(t\_{r}\right)\right|^{2}}{c^{2}}+\frac{s}{\left|\vec{R}\right|}\right)\right]$

$=\frac{\left|\vec{R}\right|}{s^{2}}\vec{a}\left(t\_{r}\right)-\frac{c^{2}\left|\vec{R}\right|}{s^{3}}\left(\vec{e}\_{\vec{R}}-\frac{\vec{v}\left(t\_{r}\right)}{c}\right)\left(1+\frac{\vec{R}∙\vec{a}\left(t\_{r}\right)}{c^{2}}-\frac{\left|\vec{v}\left(t\_{r}\right)\right|^{2}}{c^{2}}\right)$

$=\frac{\left|\vec{R}\right|^{2}}{s^{3}}\left(1-\frac{\vec{e}\_{\vec{R}}∙\vec{v}\left(t\_{r}\right)}{c}\right)\vec{a}\left(t\_{r}\right)-\frac{c^{2}\left|\vec{R}\right|}{s^{3}}\left(\vec{e}\_{\vec{R}}-\frac{\vec{v}\left(t\_{r}\right)}{c}\right)\frac{\vec{R}∙\vec{a}\left(t\_{r}\right)}{c^{2}}-\frac{c^{2}\left|\vec{R}\right|}{s^{3}}\left(\vec{e}\_{\vec{R}}-\frac{\vec{v}\left(t\_{r}\right)}{c}\right)\left(1-\frac{\left|\vec{v}\left(t\_{r}\right)\right|^{2}}{c^{2}}\right)$

在這一步，看成前兩項與後一項：

前兩項整理成

 $\frac{\left|\vec{R}\right|^{2}}{s^{3}}\left(1-\vec{e}\_{\vec{R}}∙\frac{\vec{v}\left(t\_{r}\right)}{c}\right)\vec{a}\left(t\_{r}\right)-\frac{c^{2}\left|\vec{R}\right|}{s^{3}}\left(\vec{e}\_{\vec{R}}-\frac{\vec{v}\left(t\_{r}\right)}{c}\right)\frac{\vec{R}∙\vec{a}\left(t\_{r}\right)}{c^{2}}$

$=\frac{\left|\vec{R}\right|^{2}}{s^{3}}\left[\left(1-\vec{e}\_{\vec{R}}∙\frac{\vec{v}\left(t\_{r}\right)}{c}\right)\vec{a}\left(t\_{r}\right)-\vec{e}\_{\vec{R}}∙\vec{a}\left(t\_{r}\right)\left(\vec{e}\_{\vec{R}}-\frac{\vec{v}\left(t\_{r}\right)}{c}\right)\right]$

$=\frac{\left|\vec{R}\right|^{2}}{s^{3}}\left[\left(1-\vec{e}\_{\vec{R}}∙\left(\vec{e}\_{\vec{R}}-\left(\vec{e}\_{\vec{R}}-\frac{\vec{v}\left(t\_{r}\right)}{c}\right)\right)\right)\vec{a}\left(t\_{r}\right)-\vec{e}\_{\vec{R}}∙\vec{a}\left(t\_{r}\right)\left(\vec{e}\_{\vec{R}}-\frac{\vec{v}\left(t\_{r}\right)}{c}\right)\right]$

$=\frac{\left|\vec{R}\right|^{2}}{s^{3}}\left[\vec{e}\_{\vec{R}}∙\left(\vec{e}\_{\vec{R}}-\frac{\vec{v}\left(t\_{r}\right)}{c}\right)\vec{a}\left(t\_{r}\right)-\vec{e}\_{\vec{R}}∙\vec{a}\left(t\_{r}\right)\left(\vec{e}\_{\vec{R}}-\frac{\vec{v}\left(t\_{r}\right)}{c}\right)\right]$

$=-\frac{\left|\vec{R}\right|^{2}}{s^{3}}\vec{e}\_{\vec{R}}×\left[\left(\vec{e}\_{\vec{R}}-\frac{\vec{v}\left(t\_{r}\right)}{c}\right)×\vec{a}\left(t\_{r}\right)\right]$

得 $-\frac{4πϵ\_{0}c^{2}}{Q}\vec{E}=-\frac{c^{2}\left|\vec{R}\right|}{s^{3}}\left(\vec{e}\_{\vec{R}}-\frac{\vec{v}\left(t\_{r}\right)}{c}\right)\left(1-\frac{\left|\vec{v}\left(t\_{r}\right)\right|^{2}}{c^{2}}\right)+\frac{\left|\vec{R}\right|^{2}}{s^{3}}\vec{e}\_{\vec{R}}×\left[\vec{a}\left(t\_{r}\right)×\left(\vec{e}\_{\vec{R}}-\frac{\vec{v}\left(t\_{r}\right)}{c}\right)\right]$

結果：

$$\vec{E}=\frac{Q}{4πϵ\_{0}}\frac{\left(1-\frac{\left|\vec{v}\left(t\_{r}\right)\right|^{2}}{c^{2}}\right)\left(\vec{e}\_{\vec{R}}-\frac{\vec{v}\left(t\_{r}\right)}{c}\right)}{\left|\vec{R}\right|^{2}\left(1-\vec{e}\_{\vec{R}}∙\frac{\vec{v}\left(t\_{r}\right)}{c}\right)^{3}}+\frac{Q}{4πϵ\_{0}c}\frac{\vec{e}\_{\vec{R}}×\left[\left(\vec{e}\_{\vec{R}}-\frac{\vec{v}\left(t\_{r}\right)}{c}\right)×\frac{\vec{a}\left(t\_{r}\right)}{c}\right]}{\left|\vec{R}\right|\left(1-\vec{e}\_{\vec{R}}∙\frac{\vec{v}\left(t\_{r}\right)}{c}\right)^{3}}$$

第一項 $∝\left|\vec{R}\right|^{-2}$，是 **convective field** ，和加速度 $\vec{a}\left(t\_{r}\right)$ 無關。

第二項 $∝\left|\vec{R}\right|^{-1}$是 **radiation field** ，和加速度 $\vec{a}\left(t\_{r}\right)$ 有關。

此即 Heaviside-Feynman Formula 。

在下一講中，我們將更詳細討論這個公式。