**進階電磁學**

**課程筆記**

**第22-2講、**

**The examples/paradoxes of**

**field energy and momentum**

授課教師：台灣大學物理系　易富國教授
筆記編寫：台灣大學物理系　曾芝寅助理
編者信箱：f01222076@ntu.edu.tw
上課學期：100學年度第一學期


本著作係採用[創用 CC 姓名標示-非商業性-相同方式分享 3.0 台灣 授權條款](http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/3.0/tw/deed.zh_TW)授權.

**場的動量、動量守恆、與馬克斯威爾應力張量**

**The examples of field momentum, momentum conservation, and Maxwell Stress Tensor**

已知電磁場帶有動量。什麼是馬克斯威爾應力張量？

能量動量張量 中對空間部分的描述 。

其足碼只標示1,2,3, 即空間維度。

定義應力張量 The tensor of stress

以面法線方向為*x*方向為例，

 ,

 的足碼中，前者代表力分量的方向，後者代表面的法線方向

同理，對*y,z* 方向為面法線方向比照辦理。

 , .

**馬克斯威爾應力張量 是對稱的。**(如 )

理由如下圖：

取一個受力的*xy*平面，其對*z*軸的旋轉的力矩為：

*x*方向的力矩 ，*y*方向的力矩 ，

總力矩

其中質量約與長度三次方呈正比，轉動慣量

若 不為零，則

如此得到越小尺度旋轉越快，這般不合理的結論。

為滿足角動量守恆，必須有 。

同理，,

以下探討斜面的受力情形。

斜面 的受力為其他三面的合力。

*x*方向之力：

, ,

利用三維的勾股定理 (畢氏定理)

可將法向量寫成方向餘弦

其中 ，以此類推。

 在*x*方向之力可寫成

在一個面上，張量的場 (field) 亦可定義其通量，無異於向量場。

下面利用Maxwell stress tensor整理出動量的守恆式

Poynting向量以 表示，動量密度

每單位體積中的動量，在隨時間的變化和在空間中的出入，與其力相等。

即動量守恆式：

其中宏觀的看，有相仿的高斯定律

對照能量守恆式

一個半徑*a*之球面面上均勻分布電荷，問南半球對北半球作用總力？

若把上、下半球視為點電荷的累積，計算點與點之間的作用力，將會很麻煩。

下面用另一種做法，利用動量守恆式。

從赤道將球切成兩塊，我們只看上半球所在的空間。

Poynting 向量不隨時間改變，因此力

在 球外的面上 ()，有 ,

總力

這是一個排斥力，如同同性電荷相斥，合理。

相似的，可以解下一個例子。

中軸沿*z*軸的圓柱(半徑*a*)表面流均勻電流 ，問西半圓柱對東半圓柱作用總力？

此處類比上例的方法：

在 圓柱外的面上 ()，有 ,

總力

這是一個吸引力，如同同向電流相吸，合理。

以上兩例是以Maxwell stress tensor能夠簡單解決的例題。