第 9 章
無限級數 (Infinite Series)

目錄

介紹無限數列與級數的概念
介紹無限級數的各種審斂法
介紹 Taylor 級數的概念
介紹冪級數之各種應用
無論就人或機械而言多項式是最自然的。線性逼近定裡是用一次式來逼近; Simpson 法是用二次式估計積分。

9.1 數列 (Sequences)

數列定義

定義 9.1.1. 數列 (sequence) 是一個定義在正整數 $\mathbb{N}$ 上之函數。若此函數為 f, 我們常將 $f(n)$ 記為 a_n 。數列可記為 $\{a_1, a_2, a_3, \ldots\}$、$\{a_n\}$ 或 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$。其中 a_1 稱為首項(first term), a_n 稱為第 n 項。

註 9.1.2. 一個數列可以由函數圖形來瞭解其性質。

數列的例子

例 9.1.3. (1) $a_n = \sqrt{n}, \quad \{a_n\} = \{1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \dots, \sqrt{n}, \dots\}$。
(2) $b_n = (-1)^{n+1}\frac{1}{n}, \quad \{b_n\} = \{1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \dots\}$。
(3) $c_n = \frac{n-1}{n}, \quad \{c_n\} = \{0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \dots, \frac{n-1}{n}, \dots\}$。
(4) $d_n = (-1)^{n+1}, \quad \{d_n\} = \{1, -1, 1, -1, \dots, (-1)^{n+1}, \dots\}$。

例 9.1.4. 一個數列不一定須要 $n = 1$ 從開始定義。
(1) $\left\{\frac{(-1)^n(n+1)}{3^n}\right\}$,
(2) $\left\{\sqrt{n-3}\right\}_{n=3}^{\infty}$,
(3) $\left\{\cos\frac{n\pi}{6}\right\}_{n=0}^{\infty}$。

例 9.1.5. 求一般項 a_n 的公式: 其前幾項是 $\left\{\frac{3}{5}, -\frac{4}{25}, \frac{5}{125}, -\frac{6}{625}, \frac{7}{3125}, \dots\right\}$。

[註] 這不是一個正確的 "數學題目"。例如: 前幾項是 $\{1, 2, 3, 4, \dots\}$, 但 $a_n = n^4 - 10n^3 + 35n^2 - 49n + 24$ 滿足此條件。

例 9.1.6. 有一些數列並沒簡單的定義公式:

(1) 數列 $\{a_n\}_{n=1900}^{2000}$, 其中 a_n 是西元 n 年元旦的人口數。

(2) 數列 $\{7, 1, 8, 2, 8, 1, 8, 2, 8, 4, 5, \dots\}$, 其中 a_n 是 e 的小數展開式中, 小數點後第 n 位。

(3) 數列 $\{a_n\}$, 其中 a_n 是第 n 個質數。

例 9.1.7. 以遞迴公式定義的數列, 是給定頭幾項, 再利用前幾項, 由遞迴公式 (recursion formula) 求出下一項。

(1) $a_1 = 1$, $a_n = a_{n-1} + 1$ 。

(2) $a_1 = 1$, $a_n = na_{n-1}$ 。

(3) $a_1 = 1$, $a_{n+1} = \sqrt{6 + a_n}$ 。

(4) 牛頓法: $x_0 = 1$, $x_{n+1} = x_n - \left(\frac{\sin x_n - x_n^2}{\cos x_n - 2x_n}\right)$ 。此數收斂到 $\sin x - x^2 = 0$ 的根。

(5) Fibonacci 數列: $a_1 = 1$, $a_2 = 1$, $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$ 。

升降性與有界性

定義 9.1.8. (1) 若 $a_n \le a_{n+1}$ $\forall n \ge 1$, 則 $\{a_n\}$ 稱爲上升 (increasing) 數列。

(2) 若 $a_n \ge a_{n+1}$ $\forall n \ge 1$, 則 $\{a_n\}$ 稱爲下降 (decreasing) 數列。

(3) $\{a_n\}$ 爲上升或下降數列, 則統稱爲單調 (monotonic)。

(4) 若存在 M, 使得 $a_n \le a_{n+1} \forall n > N$, 則稱 $\{a_n\}$ 爲終極上升 (ultimately incresing) 數列。

定義 9.1.9. (1) 若存在 M, 使得 $a_n \le M, \forall n$, 則稱 $\{a_n\}$ 爲有上界 (bounded above), 且 M 稱爲上界 (upper bound)。

(2) 存在 N, 使得 $a_n \ge N, \forall n$, 則稱 $\{a_n\}$ 爲有下界 (bounded below), 且 M 稱爲下界 (lower bound)。

(3) $\{a_n\}$ 有上界且有下界, 則稱爲有界數列 (bounded sequence)。

(4) 若 M 爲上界, 且沒有任一個比 M 小之數爲 $\{a_n\}$ 之上界, 則 M 稱爲最小上界 (least upper bound)。

(5) 若 N 爲上界, 且沒有任一個比 N 大之數爲 $\{a_n\}$ 之下界, 則 M 稱爲最大下界 (greatest lower bound)。

定義 9.1.10. (1) 若 $a_n \geq 0, \forall n$, 則稱 $\{a_n\}$ 爲正項 (positive) 數列。

(2) 若 $a_n \leq 0, \forall n$, 則稱 $\{a_n\}$ 爲負項 (negative) 數列。

(3) 若 $a_n a_{n+1} \leq 0, \forall n$, 則稱 $\{a_n\}$ 爲交錯 (alternating) 數列。

(4) 若存在 M, 使得 $a_n \geq 0, \forall n > N$, 則稱 $\{a_n\}$ 爲終極正項 (ultimately positive) 數列。

例 9.1.11. 以下爲非下降數列:

(1) $\{1, 2, 3, \ldots, n, \ldots\}$。

(2) $\{\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \ldots, \frac{n}{n+1}, \ldots\}$。

(3) $\{3, 3, 3, \ldots\}$。

其中 (1) 有下界, 沒有上界, (2) 有界, 且 1 爲最小上界。

例 9.1.12. $\left\{\frac{3}{n+5}\right\}$、$\left\{\frac{n}{n^2+1}\right\}$ 爲下降數列。

例 9.1.13. $\left\{\frac{n^2}{2^n}\right\}$ 爲終極下降數列。

<u>數列的極限</u>

定義 9.1.14. (1) 一個數列 $\{a_n\}$ 若滿足 $\forall\ \epsilon > 0, \exists N$ 使得若 $n > N$ 則 $|a_n - L| < \epsilon$, 則稱 $\{a_n\}$ 的極限 (limit) 爲 L。可記爲 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$ 或 “當 $n \to \infty$, $a_n \to L$”。

(2) 若極限存在, 我們稱該數列收斂 (converge), 否則稱爲發散 (diverge)。

(3) 令 $\{a_n\}$ 爲一數列。若對任一數 M, 均存在 N, 使得 $\forall n > N \Rightarrow a_n > M$, 則稱 $\{a_n\}$ 發散到無限大 (diverges to infinity)。記爲 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$, 或 $a_n \to \infty$。

(4) 若對任一數 m, 均存在 N, 使得 $\forall n > N \Rightarrow a_n < m$, 則稱 $\{a_n\}$ 發散到負無限大 (diverges to negative infinite)。記爲 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$, 或 $a_n \to -\infty$。

例 9.1.15. (1) $\lim\limits_{n\to\infty} k = k$。

(2) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$。

(3) 若 $r > 0, \lim\limits_{n\to\infty} \frac{c}{n^r} = 0$。

(4) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n} = \infty$。

例 9.1.16. 討論數列 $\{r^n\}$ 的斂散性。

例 9.1.17. 數列 $\{1, -1, 1, -1, \dots (-1)^{n+1}, \dots\}$ 爲發散。

[註] 一個發散數列不見得發散到正或負無限大, 如 $\{1, -2, 3, -4, 5, -6, \dots\}$ 及 $\{1, 0, 2, 0, 3, 0, 4, \dots\}$。

數列極限的基本性質

性質 9.1.18. 若 $\{a_n\}$ 及 $\{b_n\}$ 爲兩收斂數列, c 爲常數。則

(1) $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n + b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n + \lim\limits_{n\to\infty} b_n$。

(2) $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n - b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n - \lim\limits_{n\to\infty} b_n$。

(3) $\lim\limits_{n\to\infty} c \cdot a_n = c \cdot \lim\limits_{n\to\infty} a_n$。

(4) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n b_n = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} b_n$。

(5) 若 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n \neq 0, \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n}$。

(6) 若 $p \in \mathbb{R}$ 且 $a_n > 0, \lim\limits_{n\to\infty} a_n^p = \left(\lim\limits_{n\to\infty} a_n\right)^p$。

例 9.1.19. 求以下各極限:

(1) $\lim\limits_{n\to\infty} (-\frac{5}{n^2})$。

(2) $\lim\limits_{n\to\infty} (\frac{n-1}{n})$。

(3) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{4-7n^6}{n^6+3}$。

定理 9.1.20. (1) 令 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{c_n\}$ 爲實數數列, 它們終極滿足 $a_n \leq b_n$。則 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \leq \lim\limits_{n\to\infty} b_n$。

(2) (三明治定理, 擠壓定理, Sandwich Theorem, Squeeze Theorem) 令 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{c_n\}$ 爲實數數列, 它們終極滿足 $a_n \leq b_n \leq c_n$ 。假設 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n = L$, 則 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = L$。

推論 9.1.21. 若 $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = 0$, 則 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$。

例 9.1.22. 若 $|b_n| \leq c_n$, 且 $c_n \to 0$, 則 $b_n \to 0$。

例 9.1.23. 求以下各極限:

(1) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\cos n}{n}$

(2) $\lim\limits_{n\to\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$

定理 9.1.24 (數列的連續函數定理, The continuous function theorem for sequences)**.** 令 $\{a_n\}$ 爲一實數列, 且 $a_n \to L$。若 $f(x)$ 是一個函數, 在 a_n 上均有定義, 且在 L 連續, 則 $f(a_n) \to f(L)$。

例 9.1.25. 求以下各極限:

(1) $\lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{n+1}{n}}$

(2) $\lim_{n\to\infty} 2^{\frac{1}{n}}$

(3) $\lim_{n\to\infty} \sin\left(\frac{\pi}{n}\right)$

定理 9.1.26. 若 $f(x)$ 定義在區間 $[n_0,\infty)$上, 且 $\{a_n\}$ 爲一數列滿足 $a_n = f(n)$, $\forall n \geq n_0$, 則

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = L \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = L.$$

[註] 此定理逆敘述不見得成立。$\lim_{n\to\infty} \sin n\pi = 0$, 但 $\lim_{x\to\infty} \sin x\pi$ 不存在。

定理 9.1.27. (單調數列定理 monotonic sequence theorem)

(1) 一個上升數列收斂的充要條件是它有上界。

(2) 若上升數列收斂, 則它收斂到最小上界。

推論 9.1.28. 給定一上升數列。若有界, 則收斂; 若無界, 則發散到 ∞。

[註]

(1) 對下降數列也有對應的結果。

(2) 此定理證明用到實數完備性(Completeness Axiom): 若 S 爲 $\mathbb{R}$ 的非空子集, 且有一上界, 則必有最小上界。

(3) 此定理之反例:
(a) 並非有界數列必收斂, 例如 $\{(-1)^n\}$。
(b) 並非單調數列必收斂, 例如 $\{n\}$。

例 9.1.29. 討論數列 $\{a_n\}$ 之斂散性, 其中 (a) $a_1 = 2$,$a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + 6)$。
(b) $a_1 = 10$,$a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + 6)$。
(c) $a_1 = 2$,$a_{n+1} = 2(a_n + 6)$。

例 9.1.30. (以任意方法) 求以下各極限:

(1) $\lim_{n\to\infty} \frac{\ln^3(n^4)}{n}$,

(2) $\lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{5n}$,

(3) $\lim_{n\to\infty} \frac{x^n}{n!}$,

(4) $\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n}$,

(5) $\lim_{n\to\infty} x^{\frac{1}{n}}$,

(6) $\lim_{n\to\infty} x^n$,

(7) $\lim_{n\to\infty} (-\frac{1}{2})^n$,

(8) $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{x}{n})^n$,

(9) $\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{n+1}{n-1})^n$,

(10) $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{x}{n})^n$,

(11) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{3n^2}$,

(12) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+2n}-n)$,

(13) $\lim\limits_{n\to\infty} n\tan^{-1}(\frac{1}{n})$。

(14) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^n+3^n+4^n}{5^n}$。

9.2 無窮級數 (Infinite Series)

級數之定義

例 9.2.1. $1-1+1-1+1-1+\cdots=?$

定義 9.2.2. (1) 給定一數列 $\{a_n\}$, 則 $a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n+\cdots$ 稱爲一無窮級數 (infinite series), 其中 a_n 稱爲級數的第 n 項。

(2) 令 $s_n=\sum\limits_{k=1}^{n}a_k$, 則數列 $\{s_n\}$ 稱爲部份和數列 (sequence of partial sums), 其中 s_n 稱爲第 n 個部份和。

(3) 若數列 $\{s_n\}$ 收斂, 且 $\lim\limits_{n\to\infty}s_n=s$, 則稱 $\sum a_n$ 收斂 (converges), 且 s 稱爲此級數的和, 記爲 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n=s$。若數列 $\{s_n\}$ 發散, 則稱此級數爲發散 (diverges)。

註 9.2.3. (1) 將一級數加入有限項或去掉有限項, 可能影響其和, 但並不會影響其斂散性。

(2) 只要保持級數各項的順序, 重新設定各項的指標並不會影響其斂散性。

級數之例

例 9.2.4. (幾何級數 geometric series) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}ar^{n-1}$, 其中 r 爲公比。

$$\sum_{n=1}^{\infty}ar^{n-1}\begin{cases}\text{收斂到 } 0 & \text{若 } a=0\\ \text{收斂到 } \frac{a}{1-r} & \text{若 } |r|<1\\ \text{發散到 } \infty & \text{若 } r\geq 1, a>0\\ \text{發散到 } -\infty & \text{若 } r\geq 1, a<0\\ \text{發散} & \text{若 } r\leq -1, a\neq 0\end{cases}。$$

例 9.2.5. 求下列各級數的和。

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n2^{2n}3^{1-n}$。

(2) 循環小數 $5.23232323\cdots$。

(3) 將一球從高 a 公尺處擲下。每當球落地後, 反彈的高度爲落下高度的 r 倍 $(0 < r < 1)$。求球往返的總距離。

(4) 銀行年利率 5%。若希望以後 10 年, 每年底可領 1000 元, 則現在該存入多少錢? 若希望以後永遠都可如此領, 現在該 存入多少?

例 9.2.6. (瞭望法, telescoping) 求下列各級數的和。

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ 。

(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln \frac{n+1}{n}$ 。

審斂法

定理 9.2.7. (1) 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收斂, 則 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$。
(2) (發散判斷法) 若 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ 不存在或不爲 0, 則 $\sum a_n$ 發散。

[註] (1) 此定理之逆敍述不見得成立, 例如 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$。
(2) 此推論只能用來判斷級數之發散性, 對於級數之收斂性毫無助益。

例 9.2.8. 判斷下列各級數的斂散性。

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^2$ 。

(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n}$ 。

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}$ 。

(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{5n^2+4}$ 。

(5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n n \sin(\frac{1}{n})$ 。

例 9.2.9. 調和級數 (harmonic series) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 爲發散。

定理 9.2.10. (1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收斂的充要條件爲 $\sum\limits_{n=N}^{\infty} a_n$ 對所有 N 均收斂。

(2) 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 爲終極正項級數, 則它必收斂或發散到無限。

(3) 一個正項級數 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收斂的充要條件是它的部份和數列有上界。

級數運算

定理 9.2.11. 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 爲收斂級數, 則

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} ca_n = c\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$。

(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n + \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$。

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_n - b_n) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n - \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$。

(4) 若 $a_n \leq b_n, \forall n$, 則 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n, \leq, \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 。

[註]

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_n b_n) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 不見得成立。例如: $a_n = b_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$ 。

(2) 發散級數的非零倍仍爲發散級數。

(3) 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收斂, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 發散, 則 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_n \pm b_n)$ 必爲發散。

(4) 即使 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 均爲發散, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_n \pm b_n)$ 仍可能收斂。例如 $a_n = 1$, $b_n = -1$, $\forall n$。

例 9.2.12. 判斷下列各級數的斂散性。

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n-1}-1}{6^{n-1}}$ 。

(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{4}{2^n}$ 。

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left[\frac{3}{n(n+1)} + \frac{1}{2^n}\right]$ 。

9.3 積分審斂法 (Integral Test)

定理 9.3.1. (積分審斂法, integral test) 令 $\{a_n\}$ 爲一正項級數。若 $f(x)$ 爲定義在區間 $[N, \infty)$ 上的連續、正值、遞減函數, 且 $f(n) = a_n$, $\forall n \geq N$, 則 $\sum a_n$ 與瑕積分 $\int_N^{\infty} f(x)dx$ 同斂散。

定理 9.3.2. (積分審斂法之餘項估計) 設 $f(x)$ 在 $x \geq 1$ 上爲連續、遞減、正値函數, 且 $a_n = f(n)$, $\sum a_n$ 收斂。令 s_n 爲此數列的部份和, s 爲級數和, 且 $R_n = s - s_n$, 則

$$\int_{n+1}^{\infty} f(x)dx \leq R_n \leq \int_{n}^{\infty} f(x)dx,$$

即

$$s_n + \int_{n+1}^{\infty} f(x)dx \leq s \leq s_n + \int_{n}^{\infty} f(x)dx.$$

推論 9.3.3. 若取 $s_n* = s_n + (\int_n^\infty f(x)dx + \int_{n+1}^\infty f(x)dx)/2$, 則

$$|s - s_n*| \leq (\int_n^\infty f(x)dx - \int_{n+1}^\infty f(x)dx)/2 \text{ 。}$$

定理 9.3.4. (p-級數) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ 收斂的充要條件爲 $p > 1$。

例 9.3.5. 判斷 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}$ 之斂散。

例 9.3.6. 判斷 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$ 之斂散性。

例 9.3.7. (a) 利用前 10 項的和估計 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$, 並估計誤差。

(b) 若要誤差小於 0.0005, 則要估計到第幾項?

9.4 比較審斂法 (Comparison Test)

定理 9.4.1. (比較審斂法) 令 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 爲一正項級數, 則:

(1) 若存在收斂的級數 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ 使得 $a_n \leq c_n, \forall n \geq N$, 則 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收斂。

(2) 若存在發散的正項級數 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} d_n$ 使得 $a_n \geq d_n, \forall n \geq N$, 則 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 發散。

例 9.4.2. 判斷下列各級數的斂散性:

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{5}{5n-1}$ 。

(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n}$ 。

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3n+11}{n^3+4n+3}$ 。

(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$ 。

(5) $5 + \frac{2}{3} + \frac{1}{7} + 1 + \frac{1}{2+\sqrt{1}} + \frac{1}{4+\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{2^n+\sqrt{n}} + \cdots$ 。

(6) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$ 。

9.5 極限比較審斂法 (Limit Comparison Test)

定理 9.5.1. (極限比較審斂法) 設 $a_n, b_n > 0, \forall n > N$。

(1) 若 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = c > 0$, 則 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 與 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 同斂散。

(2) 若 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = 0$, 且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 收斂, 則 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收斂。

(3) 若 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \infty$, 且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 發散, 則 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 發散。

例 9.5.2. 判斷下列各級數的斂散性:

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2+2n+1}$。

(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2+3n}{\sqrt{5+n^5}}$。

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^{\frac{3}{2}}}$。

(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1+n\ln n}{n^2+5}$。

(5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n-1}$。

(6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1+\sin n}{n^2}$。

9.6 比例審斂法 (Ratio Test)

定理 9.6.1. (比例審斂法, ratio test) 令 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 爲一正項級數, 且設 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \rho$, 則:

(1) 若 $\rho < 1$, 則 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收斂。

(2) 若 $\rho > 1$ 或 ρ 爲無限大, 則 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 發散。

(3) 若 $\rho = 1$, 則無法下結論。

例 9.6.2. 判斷以下級數之斂散:

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^4+3n^3+2n^2+4n+5}{3^n}$。

(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(n^{52}-2007n^{24}+100n-90)\ln n}{n^{\frac{3}{2}}}$。

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n^3+3n-1}}{n^2+5}$ 。

(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\pi^n+5}{e^n}$ 。

(5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{n!n!}$ 。

(6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}$ 。

(7) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{4^n n!n!}{(2n)!}$ 。

9.7 根式審斂法 (Root Test)

定理 9.7.1. (根式審斂法, root test) 令 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 為正項級數, 且設 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \rho$, 則:

(a) 若 $\rho < 1$, 則 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收斂。

(b) 若 $\rho > 1$ 或 ρ 為無限大, 則 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 發散。

(c) 若 $\rho = 1$, 則無法下結論。

例 9.7.2. 判斷以下級數之斂散:

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{1+n}\right)^n$ 。

(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$ 。

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^2}$ 。

(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, 其中 $a_n = \begin{cases} \frac{n}{2^n} & , n \text{ 為奇數} \\ \frac{1}{2^n} & , n \text{ 為偶數} \end{cases}$ 。

9.8 交錯級數 (Alternating Series)

定理 9.8.1. (交錯級數審斂法, Leibniz 定理) 若一交錯級數 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} b_n, b_n \geq 0$ 滿足以下兩條件, 則為收斂。

(i) $\{b_n\}$ 為下降數列。

(ii) $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$。

定理 9.8.2. (交錯級數估計定理) 若交錯級數 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}b_n$ 滿足上定理的二條件, 且其值爲 s, 則以 s_n 爲估計值所造成的誤差 R_n 滿足 $|R_n| = |s - s_n| \leq b_{n+1}$。

例 9.8.3. 判斷下列級數的斂散:

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}$ 。

(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{3n}{4n-1}$ 。

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n^2}{n^3+1}$ 。

(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n\cos(n\pi)}{2^n}$。

例 9.8.4. 估計 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}$, 並精確到小數第三位。

9.9 絕對收斂與條件收斂 (Absolute Convergence and Conditional Convergence)

定義

定義 9.9.1. 給定一級數 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ (不一定是正項或交錯), 則

(1) 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|$ 收斂, 則稱 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 爲絕對收斂 (absolutely convergent)。

(2) 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收斂, 但非絕對收斂, 則稱 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 爲條件收斂 (conditionally convergent)。

定理 9.9.2. (絕對收斂審斂法) 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|$ 收斂, 則 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收斂。

例 9.9.3. 判斷以下級數爲絕對收斂, 條件收斂或發散:

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^p}, p > 0$。

(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n^3}{3^n}$。

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{n^{1.1}}$。

(4) $\sum\limits_{n=3}^{\infty}\frac{n\cos(n\pi)}{\ln n}$。

(5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n^{1.1}}$。

(6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n+1}{n}$。

(7) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, 其中 $a_n = \begin{cases} \frac{1}{n} & , n \text{ 爲奇數} \\ -\frac{1}{n^2} & , n \text{ 爲偶數} \end{cases}$。

例 9.9.4. 分別求 x 之值使下列級數爲絕對收斂, 條件收斂或發散:

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(x-5)^n}{n2^n}$。

(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (n+1)^2 (\frac{1}{x+2})^n$。

<u>重組定理</u>

定義 9.9.5. 一個級數的重組 (rearrangement), 就是將級數的各項改變次序。

定理 9.9.6. 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 爲絕對收斂, 而 $\{b_n\}$ 爲 $\{a_n\}$ 的重組, 則 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 也是絕對收斂, 且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$。

例 9.9.7. 判斷 $1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{16} + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \frac{1}{49} - \frac{1}{36} - \frac{1}{64} - \frac{1}{100} - \frac{1}{144} + \cdots$ 之斂散。

定理 9.9.8. (重組定理, Riemann rearrangement theorem) 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 爲條件收斂, 則必有一個 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 的重組, 使其和爲任意給定的實數或發散。

例 9.9.9. 已知 $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \cdots + \frac{(-1)^{n+1}}{n} + \cdots = \ln 2$。

(1) 證明 $1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \cdots = \frac{3}{2} \ln 2$。

(2) 將級數重組使其收斂到 1。

(3) 將級數重組使其發散到 ∞。

綜合例題. 判斷下列級數爲絕對收斂、條件收斂或發散:

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[5]{n^{18}+2n^{15}-3n^{11}+4n^9-6n^7+11n^5+4n^2-1}}{\sqrt{n^9-n^5+23n^2+n+17}}$

(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n(n^2+2n+4)}{(n+1)(n+2)(n+3)}$

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+2+3+\cdots+n}$

(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{3n-5} - \frac{1}{4n+1}\right)$

(5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}}{n}$

(6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\sqrt{n+\sqrt{n}}-\sqrt{n}\right)$

(7) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} [\tan^{-1} n - \tan^{-1}(n+1)]$

(8) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left[\sin \frac{1}{n} - \sin \frac{1}{n+1}\right]$

(9) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{\ln(n+2)} - \frac{1}{\ln(n+1)}\right]$

(10) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1}{n(\ln n)^2} - \frac{1}{n^2}\right)$

(11) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n (\tan^{-1} n)^n$

(12) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{\ln n}{n}\right)^n$

(13) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^n}{n^{n+1}}$

(14) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$

(15) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^n}{n^{n^2}}$

(16) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (\sqrt[n]{n}-1)^n$

(17) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(1-\frac{1}{n}\right)^n$

(18) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n4^n(n+1)!\ln n}{3^n(n+3)!}$

(19) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+3)!}{3^n(n!)^2}$

(20) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n!}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}$

(21) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{5^n n!}$

(22) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n)}$

(23) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{(2n)!}$

(24) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{e^{n^2}}$

(25) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sec^{-1} n}{\sqrt[10]{n^9+1}}$

(26) $\sum_{n=1}^{\infty} \cos n$

(27) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \frac{n\pi}{6}}{n^{\frac{3}{2}}}$

(28) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\pi}{n^{\frac{3}{4}}}$

(29) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cos \frac{\pi}{n}$

(30) $\sum_{n=1}^{\infty} n^2\sqrt{n} \tan^2\left(\frac{1}{n^2}\right)$

(31) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \cos \frac{\pi}{n}\right)$

(32) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{-\frac{1}{2}}}{2+\sin^2 n}$

(33) $\sum_{n=1}^{\infty} e^n \sin(2^{-n})$

(34) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{\cosh n}$

(35) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \tanh n$

(36) $\sum_{n=1}^{\infty} ne^{-n^2}$

(37) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{3^{2n-1}+n}$

(38) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{n\pi}}{\pi^{ne}}$

(39) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \ln n}{(n+1)^3}$

(40) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-5)^{n-1}}{(n+1)^2 4^{n+2}}$

(41) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^4}$

(42) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \ln n}$

(43) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[n]{n}}{n^2}$

(44) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(\ln n)^2}$

(45) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \ln \frac{n+1}{n}$

(46) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n}{(\ln n)^{\frac{n}{2}}}$

(47) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^{\ln n}}$

(48) $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n \ln n [\ln(\ln n)]^p}$

(49) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{\ln(\ln n)}$

(50) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \ln \frac{1}{n}$

(51) $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{2}{n}\right)$

(52) $\sum_{n=1}^{\infty} \ln \frac{n}{2n+1}$

(53) $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n \ln n \sqrt{\ln(\ln n) - 1}}$

(54) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+(-1)^n}{n^2}$

(55) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{e^{\sqrt{n}}}$

(56) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n 2^{\frac{1}{n}}$

(57) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-n)^n}{5^{2n+3}}$

(58) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\frac{1}{n}}}$

(59) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n-\ln n}$

(60) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\sqrt{n}}}$

(61) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\right)^{-1}$

(62) $\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}-\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}-\frac{1}{6^2}+\cdots$

(63) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{n^2}$

(64) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \int_n^{n+1} \frac{dx}{x^2}$

(65) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[n]{n}}$

(66) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (\sqrt[n]{2}-1)$

(67) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\log_n(n!)}{n^3}$

9.10 冪級數(Power Series)

定義 9.10.1. 形如 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n$ 之型式的級數稱爲 $x-c$ 的冪級數 (power series) 或以 c 爲中心 (center) 的冪級數, $a_0, a_1, a_2, \ldots$ 稱爲級數的係數。

定理 9.10.2. (1) 若冪級數 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ 在 $x = d \neq 0$ 收斂，則它在所有 x，$x \in (-|d|, |d|)$，處均絕對收斂 。

(2) 若它在 $x = d$ 發散，則它在所有 x，$|x| > |d|$ 處均發散 。

定理 9.10.3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n (x-c)^n$ 的收斂性可以有以下三種可能。

(a) 存在 R, 使得它在 $\{x : |x-c| > R\}$ 處發散, 在 $\{x : |x-c| < R\}$ 處絕對收斂 。但在端點 $x = c+R$ 及 $x = c-R$ 處不一定。

(b) 級數在所有 x 均爲絕對收斂 $(R = \infty)$。

(c) 級數只在 $x = c$ 收斂 $(R = 0)$ 。

定義 9.10.4. 上一定理中的 R 稱爲收斂半徑 (radius of convergence), 所有收斂的 x 值構成一個區間, 稱爲收斂區間 (interval of convergence)。
在 (a) 中有四種可能性$(c-R, c+R)$、$[c-R, c+R]$、$(c-R, c+R]$ 或 $[c-R, c+R)$; 在 (b) 中爲 $\mathbb{R}$; 在 (c) 中, 收斂區間爲 $\{c\}$。

註 9.10.5. (1) 對於收斂之 x 值, 冪級數可以定義一個函數。因此收斂區間就是冪級數所定義之函數的定義域。
(2) 若 $\lim\limits_{n=1}^{\infty}|\frac{a_{n+1}}{a_n}| = L$, ($L$ 可能為 ∞,) 則收斂半徑 $R = 1/L$。

例 9.10.6. 求以下各冪級數的收斂區間:

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^n}{n}$ 。

(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n-1}$ 。

(3) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$ 。

(4) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}n!x^n$ 。

(5) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{n(2x+5)^n}{(n^2+1)3^{n+1}}$ 。

定理 9.10.7. (Abel 定理) 一個冪級數的和在它的收斂區間上連續。

9.11 冪級數的運算

加減

定理 9.11.1. 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n(x-c)^n$ 在 $(c-R, c+R)$ 上定義一個函數 $f(x)$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n(x-c)^n$ 在 $(c-S, c+S)$ 上定義一個函數 $g(x)$, 則 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)(x-c)^n$ 在兩定義域的交集部份定義函數 $(f+g)(x)$, 且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n-b_n)(x-c)^n$ 在兩定義域的交集部份定義函數 $(f-g)(x)$。

乘除

定理 9.11.2. 令 $A(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 及 $B(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty}b_nx^n$ 在 $|x| < R$ 處絕對收斂 , 且 $c_n = \sum\limits_{k=0}^{n}a_kb_{n-k}$, 則 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_nx^n$ 在 $|x| < R$ 處收斂到 $A(x)B(x)$。即

$$(\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n)(\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n) = \sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n \text{ 。}$$

此乘法稱為 Cauchy Product。

註 9.11.3. 對冪級數可作長除法 (long division)。

例 9.11.4. 利用冪級數的乘除法, 求函數 $\frac{1}{(1-x)}, \frac{1}{(1-x)^2}, |x| < 1$ 的冪級數。

微積

定理 9.11.5. (逐項微分定理, Term-by-term Differentiation Theorem) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x-c)^n$ 在 $(c-R, c+R), R>0$, 上收斂，則它在 $(c-R, c+R)$ 上定義一個函數 $f(x)$, 此函數可任意階微分, 且

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x-c)^{n-1} \text{。}$$

此一級數在 $(a-R, a+R)$ 上收斂。

定理 9.11.6. (逐項積分定理) 令 $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n$ 在 $(c-R, c+R)$ 上收斂。則 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{(x-c)^{n+1}}{n+1}$ 在 $(c-R, c+R)$ 上收斂，且

$$\int f(x)dx = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{(x-c)^{n+1}}{n+1} + C \text{。}$$

[註] 級數 $\sum_{n=1}^{\infty} c_n(x-a)^n$, $\sum_{n=1}^{\infty} n c_n (x-a)^{n-1}$ 與 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n \frac{(x-a)^{n+1}}{n+1}$ 之收斂區間可能會改變。

例 9.11.7. 求以下函數的冪級數表現。它們在何處相等?

(1) $\frac{1}{(1-x)^2}$。

(2) $\frac{x}{(1-x)^3}$。

(3) $\ln(1+x)$。

(4) $\tan^{-1} x$。

(5) $\frac{1}{x+2}$。

例 9.11.8. 寫出 $\ln 2$ 的一個級數表示式。

例 9.11.9. 求冪級數 $\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n$ 及 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ 所定義的函數。

例 9.11.10. (1) 求和 $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^n$ 。

(2) 求和 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$ 。

9.12 Taylor 級數及 Maclaurin 級數 (Taylor Series and Maclaurin Series)

Taylor 級數

定理 9.12.1. 若 $f(x)$ 在 $x=c$ 點有級數表現 (或級數展開 series representation, series expansion), 即 $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n, |x-c| < R$, 則其係數 $a_n = \frac{f^{(n)}(c)}{n!}$。

定義 9.12.2. (1) 若在若 $f(x)$ 在一個包含 c 的區間之內點上可以無限次微分, 則 $f(x)$ 在 $x=c$ 的 Taylor 級數 (Taylor series generated by f at $x=c$) 是

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n \text{ 。}$$

若 $c=0$, 則稱爲 Maclaurin 級數。

(2) 若 $f(x)$ 在 $x=c$ 有 Taylor 級數, 且此級數在包含 c 的某開區間上收斂到 $f(x)$, 則稱 $f(x)$ 在 $x=c$ 可解析 (analytic)。

(3) 若 $f(x)$ 在某開區間上每一點均可解析, 則稱 $f(x)$ 在該開區間上可解析。

例 9.12.3. 令 $f(x)=\begin{cases}0, & x=0\\ e^{-\frac{1}{x^2}}, & x\neq 0\end{cases}$ 。求 $f(x)$在 $x=0$ 之 Taylor 級數。

[註] 此級數在所有 x 值收斂, 但只在 $x=0$ 收斂到 $f(x)$。

Taylor 定理

定義 9.12.4. 令 $f(x)$ 在一個包含 a 之區間的內點上有 N 階導數，則對 $n, 1\leq n\leq N$ ，n 階的 Taylor 多項式 (Taylor polynomial of order n) 爲

$$P_n(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \text{ 。}$$

定理 9.12.5. (Taylor 定理) 假設在包含 c 的開區間 I 上，$f(x)$ 可無限次可微，則 $\forall n, \forall x\in I$,

$$f(x)=f(c)+f'(c)(x-c)+\cdots+\frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n+R_n(x),$$

其中

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(s)}{(n+1)!}(x-c)^{n+1},$$

s 介於 c 及 x 之間, 或

$$R_n(x)=\frac{1}{n!}\int_c^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)dt \text{ 。}$$

[註] (1) Taylor 定理可記爲 $f(x)=P_n(x)+R_n(x)$。$R_n(x)$ 稱爲 n 階餘項, 或以 $P_n(x)$ 估計 $f(x)$的 誤差項。
(2) 若 $\lim_{n\to\infty} R_n(x)=0, \forall x\in I$ ，則 $f(x)$ 在 $x=a$ 可解析。

例 9.12.6. 證明以下各函數在所有 $x\in\mathbb{R}$, Maclaurin 級數收斂到 $f(x)$。

(1) $f(x)=e^x$ 。

(2) $f(x)=\sin x$ 。

(3) $f(x)=\cos x$ 。

例 9.12.7. 求下列函數在 $x=0$ 之 Taylor 級數。

(1) $\frac{1}{1-x}$。

(2) $\frac{1}{(1-x)^2}$。

(3) $\ln(1+x)$。

(4) $\tan^{-1} x$。

(5) $\sinh x$。

(6) $\cosh x$。

例 9.12.8. 求出以下函數在 $x=0$ 之 Taylor 級數 。

(1) $f(x)=\cos 2x$ 。

(2) $f(x)=\cos x^2$ 。

(3) $f(x)=\cos(x-1)$ 。

(4) $f(x)=x^3\sin x$ 。

(5) $f(x)=\frac{\sin(x^2)}{x}$。

(6) $e^{-\frac{x^2}{3}}$。

例 9.12.9. (1) 求 e^x 在 $x=2$ 的 Taylor 級數。

(2) 將 $f(x)=\sin x$ 寫成以 $\frac{\pi}{3}$ 爲中心的 Taylor 級數。

(3) 將 $\ln x$ 展成在 $x-2$ 的 Taylor 級數。

例 9.12.10. 求出以下函數在 $x=0$ 之 Taylor 級數的非零前三項 。

(1) $e^x\sin x$ 。

(2) $\tan x$ 。

(3) $\ln\cos x$ 。

<u>二項級數</u>

例 9.12.11. 求 $f(x)=(1+x)^k$ 的 Maclaurin 級數, 其中 $k\in\mathbb{R}$。

定義 9.12.12. (1) 對 $m\in\mathbb{R}, k$ 爲正整數, 定義 $\binom{m}{0}=1, \binom{m}{1}=m, \binom{m}{k}=\frac{m(m-1)\cdots(m-k+1)}{k!}$, 稱爲二項係數 (binomial coefficient)。。

(2) 對 $x\in(-1,1)$ 時 , 則二項級數 (binomial series) 爲 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\binom{m}{k}x^k$ 。

定理 9.12.13. 當 $x\in(-1,1)$ 時 , 二項級數收斂到 $(1+x)^m$, 即 $(1+x)^m=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\binom{m}{k}x^k, m\in\mathbb{R}$。

例 9.12.14. 利用二項級數 , 求以下各函數在 $x=0$ 的 Taylor 級數。

(1) $(1-x^2)^{\frac{1}{2}}$ 。

(2) $(1+x)^{-\frac{1}{2}}$ 。

(3) $\sin^{-1} x$ 。

例 9.12.15. 求 $f(x)=\frac{1}{\sqrt{4-x}}$ 的 Maclaurin 級數及其收斂區間。

9.13 冪級數之應用(Applications of Power Series)

估計

例 9.13.1. (1) 利用級數求 e 之值, 若以 $n=6$ 來估計其誤差爲何?

(2) 利用級數求 e 之值, 使其誤差 $< \frac{1}{10^6}$ 。

例 9.13.2. (a) 利用在 $a=8$ 的二次 Taylor 多項式估計 $f(x)=\sqrt[3]{x}$。

(b) 求 $7 \leq x \leq 9$ 時的誤差。

例 9.13.3. (a) 求 $\tan^{-1} x$ 之 Maclaurin 級數。

(b) 證明在 $|x| \leq 1$ 時 , $\tan^{-1} x$ 等於其 Taylor 級數 。

(c) 導出 Leibniz 公式 $\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)} + \cdots$ 。

(d) 利用 $\frac{\pi}{4} = \tan^{-1}\frac{1}{2} + \tan^{-1}\frac{1}{3}$ 估計 π

[註] $\pi = 48\tan^{-1}\frac{1}{18} + 32\tan^{-1}\frac{1}{57} - 20\tan^{-1}\frac{1}{239}$

估計積分值

例 9.13.4. (a) 將 $\int \frac{1}{1+x^7}dx$ 寫成級數。

(b) 估計 $\int_0^{0.5} \frac{1}{1+x^7}dx$ 精確到 10^{-7}。

例 9.13.5. (a) 求 $\int_0^x e^{-t^2}dt$ 的級數表示。

(b) 求 $\int_0^1 e^{-x^2}dx$ 精確到 0.001 。

求極限

例 9.13.6. 利用冪級數求下列極限。

(1) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\ln x}{x-1}$ 。

(2) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x - \tan x}{x^3}$ 。

(3) $\lim\limits_{x\to 0}(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x})$ 。

(4) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2}$ 。

(5) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{(e^{2x}-1)\ln(1+x^3)}{(1-\cos 3x)^2}$ 。

解微分方程

例 9.13.7. 求初始值問題 $y' - y = x, y(0) = 1$ 之級數解。

例 9.13.8. 求 $y'' + x^2 y = 0$ 之冪級數解。

Euler公式

定義 9.13.9. 對任意 $\theta \in \mathbb{R}$, 定義 $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ 。

註 9.13.10. (1) Euler 公式 $e^{i\pi} = -1$ 。

(2) 若 $\alpha \in \mathbb{C}$, 則可驗證 $\int e^{\alpha x}dx = \frac{1}{\alpha}e^{\alpha x} + C$ 仍然成立。

例 9.13.11. 求 $\int e^{ax}\cos bx dx$ 。