

普通物理學甲下 課程筆記

三十三：光與物質的二相性(波動性及粒子性)

授課教師：台灣大學物理系 易富國教授

筆記編寫：台灣大學物理系 楊淵榮同學

編者信箱：r01222074@ntu.edu.tw

上課學期：98 學年度第二學期



本筆記以 創用 CC「姓名標示-非商業性-相同方式分享 3.0 台灣」授權條款釋出

摘要:

(1)光的波動性、粒子性(二向性)

(I)Planck 黑體輻射公式

(II)密利根光電效應(1913)

(III)康普敦效應(1923):

(2)物質粒子性、波動性(二向性)

(I)氣體的莫耳定容比熱

(II)Bohr 氫原子理論

(III) Louis de Broglie 物質波(1924)

(3)二元性的闡述

(I)光雙狹縫干涉(波動性)

(II)物質波動性

(III)電子單狹縫繞射

(1)光的波動性、粒子性(二向性)

光的干涉、繞射證明其波動性

(i)Planck 黑體輻射公式:

$$\rho(T, \nu) d\nu = \frac{8\pi\nu^2 d\nu}{c^3} \frac{h\nu}{e^{kT} - 1}$$

用能量成塊 $\varepsilon = h\nu$ 能量量子形式表示

如果 $h\nu \ll kT$, 也就是低頻時

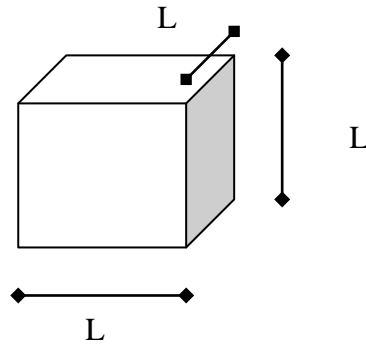
$$E(T, \nu) = \frac{h\nu}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1} \approx \frac{h\nu}{\frac{h\nu}{kT}} = kT \text{ 為 Rayleigh-Jeans 分佈}$$

如果 $h\nu \gg kT$

$$E(T, \nu) = \frac{h\nu}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1} \approx \frac{h\nu}{e^{\frac{h\nu}{kT}}} = h\nu e^{-\frac{h\nu}{kT}} \text{ 為 wein 分佈}$$

在 Wein 近似中

$$\begin{aligned} \ln \frac{E(T, \nu)}{h\nu} &= -\frac{h\nu}{kT} \\ \Rightarrow -\frac{k}{h\nu} \ln \frac{E(T, \nu)}{h\nu} &= \frac{1}{T} = \frac{ds}{dE} \\ \Rightarrow s &= -\frac{kE(T, \nu)}{h\nu} \left[\ln \frac{E(T, \nu)}{h\nu} - 1 \right] \end{aligned}$$



而頻率為 ν 到 $\nu + d\nu$ 之間的駐波型態總個數為 $\frac{L^3 8\pi\nu^2 d\nu}{c^3} = \frac{V 8\pi\nu^2 d\nu}{c^3}$

所提供的熵為 $\frac{V 8\pi\nu^2 d\nu}{c^3} \left[-\frac{kE(T, \nu)}{h\nu} \left(\ln \frac{E(T, \nu)}{h\nu} - 1 \right) \right]$

讓頻率為 ν 到 $\nu + d\nu$ 之間的駐波提供的總能量為 $dU = \frac{V 8\pi\nu^2 d\nu}{c^3} E(T, \nu)$

所以

$$\begin{aligned} s_\nu &= \frac{V 8\pi\nu^2 d\nu}{c^3} \left[-\frac{kE(T, \nu)}{h\nu} \left(\ln \frac{E(T, \nu)}{h\nu} - 1 \right) \right] \\ &= \left[-\frac{kdU}{h\nu} \left(\ln \frac{E(T, \nu) \frac{V 8\pi\nu^2 d\nu}{c^3}}{h\nu \frac{V 8\pi\nu^2 d\nu}{c^3}} - 1 \right) \right] \end{aligned}$$

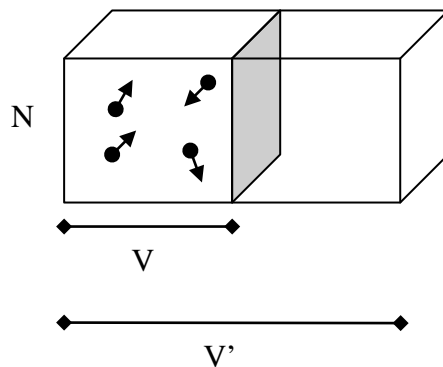
$$= \left[-\frac{kdU}{hv} \left(\ln \frac{dU}{hv \frac{V 8\pi v^2 dv}{c^3}} - 1 \right) \right]$$

注意 $\frac{dU}{hv}$ 代表了能量塊的數目

若在過程中令 dU 不變，如膨脹成 $V' = L^3$ ，其熵差為

$$\begin{aligned} s_v(V') - s_v(V) &= \frac{kdU}{hv} [\ln V' - \ln V] \\ &= k \ln \left(\frac{V'}{V} \right)^{\frac{dU}{hv}} \end{aligned}$$

這跟將 N 個氣體分子放在體積 V 的容器，拆掉隔板使之絕熱自由膨脹至體積 V' 的熵類似：

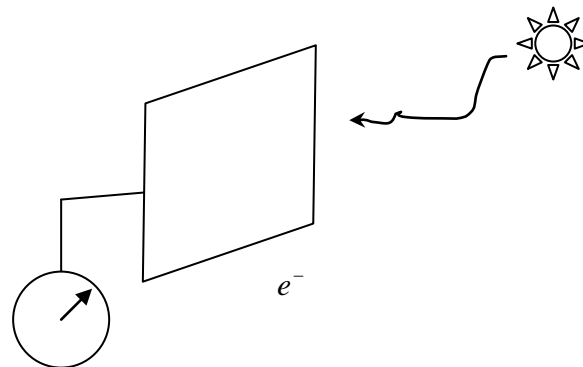


$$\Delta s = \ln \left(\frac{V'}{V} \right)^N$$

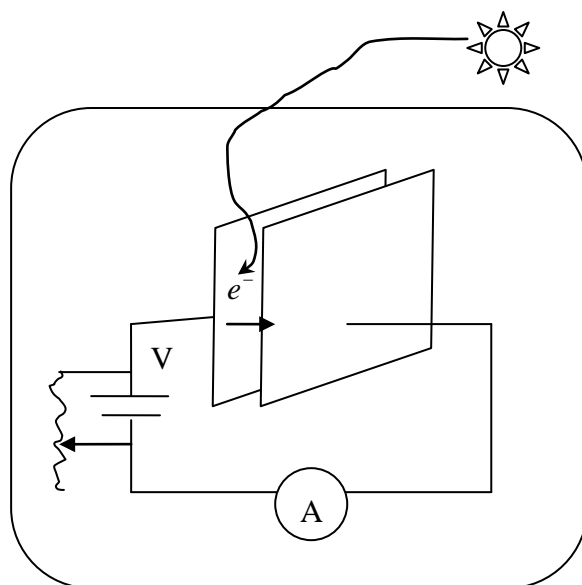
所以愛因斯坦(1905)從這樣的關係，認為光的性質和氣體分子的性質類似，應該是一個粒子

光在 $hv \gg kT$ 顯示出粒子性

在將能量丟出或吸收時，必須要一塊一塊的丟出或是吸收，不能只吸收一部分。這部分由光電現象(光照在金屬板上會有電荷釋出)證實



(II)1913，密利根光電效應

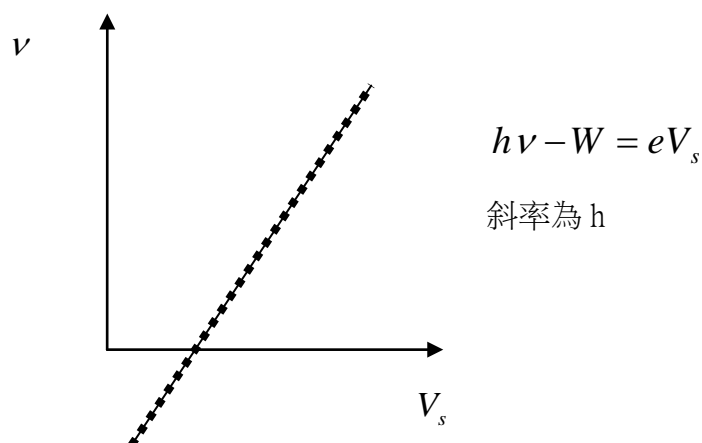


假設電子吸收一塊光的能量 $h\nu$ ，電子出來可能擁有的最大能量為

$\frac{1}{2}mv^2 = h\nu - W$ ， W 為功函數，為金屬表面電子出射所要抗拒的能量，是金屬的特徵。

此最大能量可以利用反向偏壓測量出來，將電壓持續增大，直到

$\frac{1}{2}mv^2 = h\nu - W = eV_s$ 時將沒有電子射出(電流為零)，此時的電壓 V_s 成為截止電壓



即便粒子性成功的解釋光電實驗，對當時的物理學家而言，這還不足以為光粒子性的證據，一直到 1923 年 Compton 散射實驗才廣為接受

(III)康普敦效應(1923):

$$\hbar = \frac{h}{2\pi}$$

$${}_{\gamma}P_{\mu} = \left(\frac{\hbar\omega_{\gamma}}{c}, \hbar\vec{k}\right) \quad {}_0P_{\mu} = (m_0c, \vec{0})$$

$${}_{\gamma'}P_{\mu} = \left(\frac{\hbar\omega'_{\gamma'}}{c}, \hbar\vec{k}'\right)$$

$${}_eP_{\mu} = \left(\frac{{}_eE}{c}, {}_e\vec{P}\right)$$

$${}_e\vec{P} = \frac{m_0\vec{u}}{\sqrt{1 - \frac{\vec{u} \cdot \vec{u}}{c^2}}}, \quad {}_eE = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1 - \frac{\vec{u} \cdot \vec{u}}{c^2}}}$$

其中因為 ${}_eE = hf = \frac{h}{2\pi} 2\pi f = \hbar\omega$, $|{}_e\vec{P}| = \frac{{}_eE}{c} = \frac{\hbar\omega}{c} = \hbar|\vec{k}| \Rightarrow {}_e\vec{P} = \hbar\vec{k}$ 所以光子 γ 的

四動量為 ${}_{\gamma}P_{\mu} = \left(\frac{\hbar\omega_{\gamma}}{c}, \hbar\vec{k}\right)$

由四動量守恆

$${}_{\gamma}E + m_0c^2 = {}_{\gamma'}E + {}_eE \Rightarrow \hbar\omega_{\gamma} + m_0c^2 = \hbar\omega'_{\gamma'} + \frac{m_0c^2}{\sqrt{1 - \frac{\vec{u} \cdot \vec{u}}{c^2}}} \text{ 能量守恆}$$

$${}_{\gamma}\vec{P} + {}_0\vec{P} = {}_{\gamma'}\vec{P} + {}_e\vec{P} \Rightarrow \hbar_{\gamma}k + 0 = \hbar_{\gamma'}k + \frac{m_0\vec{u}}{\sqrt{1 - \frac{\vec{u} \cdot \vec{u}}{c^2}}} \text{ 動量守恆}$$

$$\text{可以推導出 } \lambda' - \lambda = \frac{h}{m_0c} (1 - \cos(\theta)) \quad \text{(能量與動量守恆)}$$

其中 λ 為入射光的波長, λ' 為出射光的波長

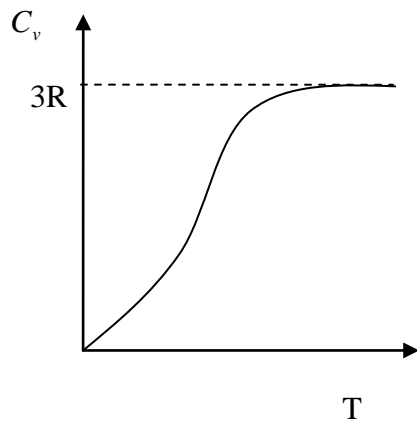
Compton 效應, 粒子性證據

所以, 當 $h\nu \ll kT$ 時光表現了波動性, 而 $h\nu \gg kT$ 則展現了粒子性

(2) 物質粒子性、波動性(二向性)

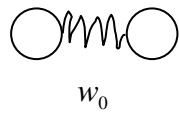
(I) 氣體的莫耳定容比熱

單原子氣體的莫耳定容比熱，在 Dulong-Petit law 的預測應為 $3R$ ，為能量均分原理的推論，但是實驗做出來卻不是這樣：

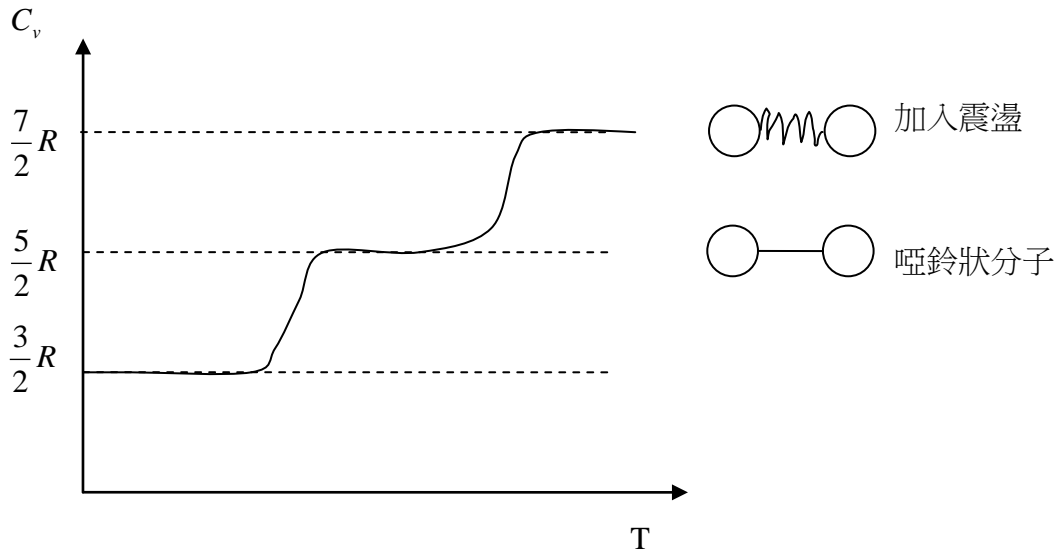


這個現象可以用普朗克的公式解釋

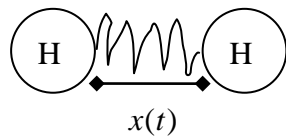
雙原子氣體的莫耳定容比熱，在 Dulong-Petit law 的預測應為 $\frac{7}{2}R$ ，為能量均分原理的推論，但是實驗結果為：



$$\nu_0 = \frac{w_0}{2\pi}, \quad E(T, \nu) = \frac{h\nu}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1}$$



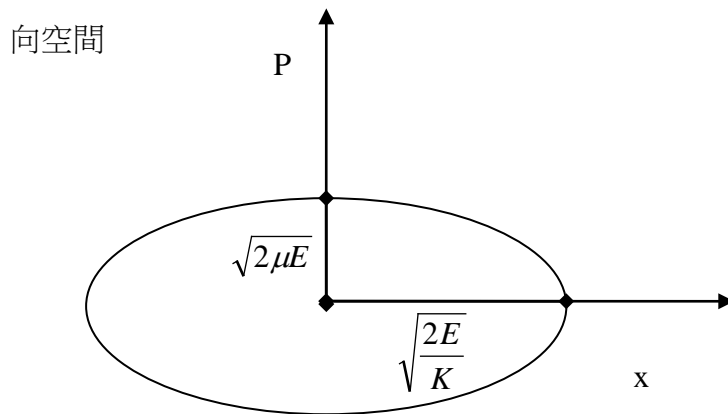
顯示在高溫時震盪才加入進去氣體定容比熱的貢獻
 若要解釋這個現象則須利用普朗克的公式解釋:
 以氫分子為例



則其運動方程式應為 $\mu \frac{d^2 x(t)}{dt^2} = -kx(t)$ ， μ 為約割質量，而 K 為彈簧常數

$$\text{總能量 } E = \frac{1}{2} \mu \left(\frac{dx(t)}{dt} \right)^2 + \frac{1}{2} Kx^2(t) = \frac{1}{2} \frac{1}{\mu} (\vec{P})^2 + \frac{1}{2} Kx^2(t)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2\mu E} (\vec{P})^2 + \frac{K}{2E} x^2(t) = 1, \quad \text{其圖形為長軸 } \sqrt{\frac{2E}{K}}, \text{ 短軸 } \sqrt{2\mu E} \text{ 的橢圓:}$$



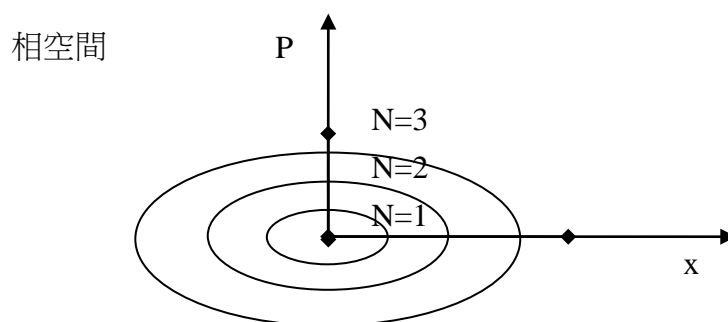
橢圓面積 = $\pi ab = \pi \sqrt{2\mu E} \sqrt{\frac{2E}{K}} = \pi 2E \sqrt{\frac{\mu}{K}} = \frac{2\pi E}{\omega_0} = \frac{E}{\nu_0}$ ，其中 $\frac{K}{\mu} = \omega_0^2$ ， ω_0 為自然

震盪頻率

能量量子化: $E = N\varepsilon = Nh\nu_0$ ，其中 N 為一整數

則橢圓面積 = $\pi ab = Nh$

所以只有橢圓面積為 N 倍的普朗克常數的軌道才能存在



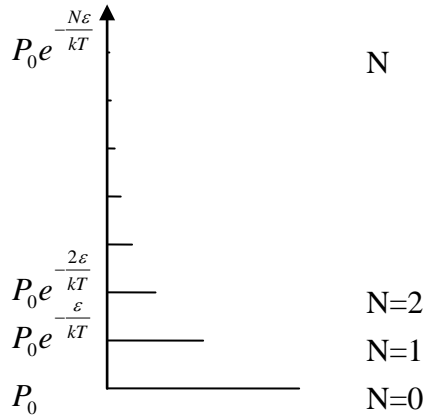
相空間也被分割成等面積 ($h\nu_0$) 區塊，因為 $N+1$ 軌道所圍的空間和 N 軌道所圍的空間之面積的差值為 $h\nu_0$

而 $h = J \cdot s =$ 作用量，代表相空間面積的分隔

能量均分原理中位能和動能各 $\frac{1}{2}$ ，並假設動量的變化是連續的，但因為能量被量

子化，所以僅面積為 N 倍的普朗克常數的軌道才能存在，此時能量的變化不是連續的，這是能量均分原理所以錯誤的原因。

$\varepsilon = h\nu$ ，由波茲曼分布可知，各軌道出現的相對機率正比於 $e^{-\frac{N\varepsilon}{kT}}$



$$P_0(1 + e^{-\frac{\epsilon}{kT}} + e^{-\frac{2\epsilon}{kT}} + \dots) = 1 \Rightarrow P_0 = 1 - e^{-\frac{\epsilon}{kT}}, \text{ 令 } f(-\frac{\epsilon}{kT}) = 1 + e^{-\frac{\epsilon}{kT}} + e^{-\frac{2\epsilon}{kT}} + \dots$$

$$\text{而平均能量為 } \bar{E} = (0P_0 + \epsilon P_0 e^{-\frac{\epsilon}{kT}} + 2\epsilon P_0 e^{-\frac{2\epsilon}{kT}} + \dots)$$

$$= P_0 \epsilon (0 + e^{-\frac{\epsilon}{kT}} + 2e^{-\frac{2\epsilon}{kT}} + \dots)$$

$$= P_0 \epsilon \frac{df(y)}{dy}, \text{ 令 } y = -\frac{\epsilon}{kT}$$

$$= P_0 \epsilon \frac{e^y}{(1-e^y)^2} = \epsilon \frac{e^y}{(1-e^y)} = \frac{\epsilon}{e^{\frac{\epsilon}{kT}} - 1}, \text{ 因 } P_0 \frac{1}{(1-e^y)} = \frac{1 - e^{-\frac{\epsilon}{kT}}}{1 - e^{-\frac{\epsilon}{kT}}} = 1$$

$$\text{再帶入 } \epsilon = h\nu, \bar{E} = \frac{h\nu}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1}, \text{ 為普朗克公式}$$

在低溫時因為 $h\nu \gg kT$ ，所以 $\bar{E} \rightarrow e^{-\frac{h\nu}{kT}} \rightarrow 0$ ，所以相當於彈簧的自由度是凍結

的，所以看不到 $\frac{7}{2}R$

(II) Bohr 氫原子理論

十九世紀中葉之後，人們利用光柵研究員子光譜，漸漸發現頻率可以寫成一組數列之間的差別：

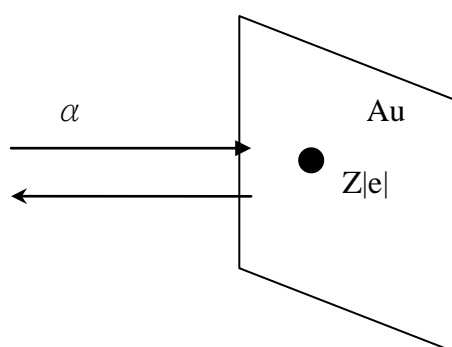
$$\nu_{mn} = T(m) - T(n), \quad T(m) \text{ 為一組數列}$$

此原理為理茲原理，有點像火車站的里程

後來於 1880 年代高中物理老師 Balmer 發現

$$\nu_{2n} = R\left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{n^2}\right), \quad \text{其中 } R \text{ 為 Rydberg 常數}$$

1909~1910 年間，Rutherford 進行 α 粒子散射實驗

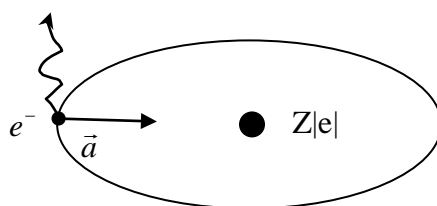


發現有 α 粒子被反彈，顯示 Au 中有比 α 粒子質量大很多的東西集中在很小的區域。

Rutherford 發現原子核

接著，Bohr 建構了 Bohr 氫原子模型

發現原子核後，一般人想像的是行星原子模型



但是根據 Maxwell 的電磁理論，這樣會放出電磁波，失去能量，最後會整個模型會崩潰

所以 Bohr 做了三個假設

(I) 電子在穩定態時不放射電磁波

(II) 電子可以從第 m 個穩定態(能量 E_m)躍遷至第 n 個穩定態(能量 E_n)，放射

$$\text{電磁波 } \nu_{mn} = \frac{E_n - E_m}{h} \text{ (能量塊要整個丟出去)}$$

(III) 穩定態的條件為 $nh = \oint l d\phi = l \oint d\phi = 2\pi l$ ，其中 $\vec{l} = m\vec{r} \times \vec{v}$ 為角動量是守衡

的， ϕ 為繞軌道轉的角度。所以條件為 $l = \frac{nh}{2\pi} = n\hbar$

穩定態能量 E_n

$$E = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Z|e||e|}{2r}, \text{ 所以只要知道 } r \text{ 就可算出 } E$$

$$m \frac{v^2}{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Z|e|^2}{r^2}$$

$$\Rightarrow \frac{4\pi\epsilon_0 m^2 v^2 r^2}{mZ|e|^2} = r$$

$$\Rightarrow \frac{4\pi\epsilon_0 l^2}{mZ|e|^2} = r$$

$$\Rightarrow r_n = \frac{4\pi\epsilon_0 n^2 \hbar^2}{mZ|e|^2}$$

$$\text{所以 } E_n = -\left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\right)^2 \frac{Z|e||e|}{2r_n} = -\left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\right)^2 \frac{mZ^2|e|^4}{2n^2\hbar^2}$$

而

$$h\nu_{ij} = E_j - E_i = -\left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\right)^2 \frac{mZ^2|e|^4}{2j^2\hbar^2} - \left(-\left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\right)^2 \frac{mZ^2|e|^4}{2i^2\hbar^2}\right) = \frac{mZ^2|e|^4}{(4\pi\epsilon_0)^2 2\hbar^2} \left(\frac{1}{i^2} - \frac{1}{j^2}\right)$$

$$\text{所以 } \nu_{ij} = \frac{mZ^2|e|^4}{8\epsilon_0^2 h^3} \left(\frac{1}{i^2} - \frac{1}{j^2}\right), \text{ 而 } R = \frac{mZ^2|e|^4}{8\epsilon_0^2 h^3} \text{ (Rydberg constant)}$$

1914 年 Franck-Hertz experiment 中，發現電子所損失的能量是一個固定的值，故此支持了 Bohr 的氫原子理論

並且，此理論在 He^+ 中也是適用的 ($Z=2$)

但是在解釋 He 卻發生了困難

(III) Louis de Broglie 物質波(1924)

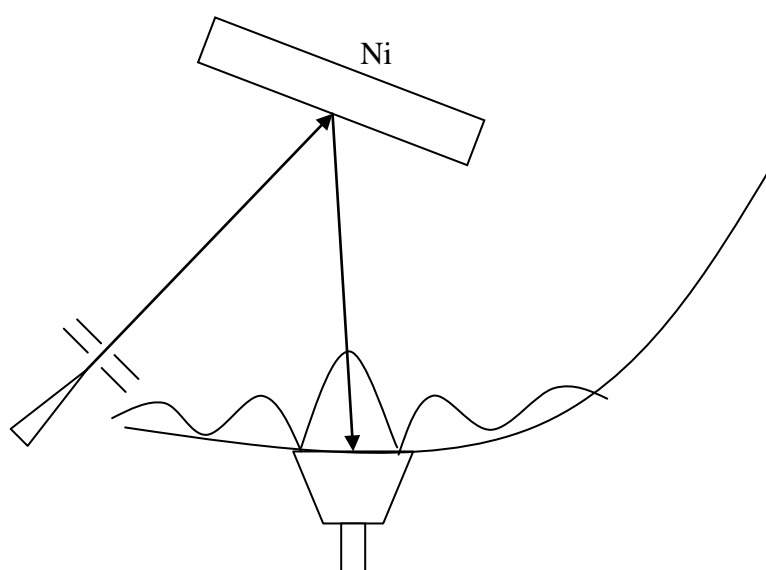
物質波動性，de Broglie 物質波

光 $E = h\nu$, $\vec{P} = \hbar\vec{k}$

物質 $E = h\nu$, $\vec{P} = \hbar\vec{k}$, 而 $|\vec{k}| = \frac{2\pi}{\lambda}$, $|\vec{P}| = \frac{2\pi\hbar}{\lambda} = \frac{h}{\lambda}$

注意，要了解 de Broglie 物質波一定要了解特殊相對論的原理，並且特別要了解不同時性

於 1927 年由 Clinton Joseph Davisson 和 Lester Halbert Germer 實驗觀察到電子繞射



其波長跟 de Broglie 物質波的預測吻合。

在相空間中

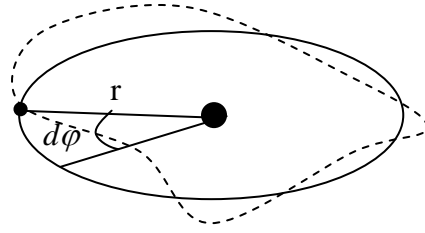
$$\oint P dx = \text{橢圓面積} = \pi ab = Nh$$

$$= \oint \frac{h}{\lambda(x)} dx$$

$$Nh = \oint \frac{h}{\lambda(x)} dx \Rightarrow N = \oint \frac{1}{\lambda(x)} dx$$
 , 也就是說物質波量子化的條件是駐波

$$Nh = \oint l d\phi = \oint mvr d\phi = \oint \frac{h}{\lambda} r d\phi = \frac{2\pi r}{\lambda} h$$
 , 所以 $N = \frac{2\pi r}{\lambda}$, 周長要是波長的整倍數

才有建設性的駐波



同樣的，我們得到在橢圓軌道物質波量子化的條件是駐波

但是物質的粒子性和波動性之間的調和仍然是一個問題

直到 1926 年薛丁格提出的薛丁格波動方程式

稍早，海森堡也提出其量子理論(矩陣力學)，他的理論是建立在矩陣上:

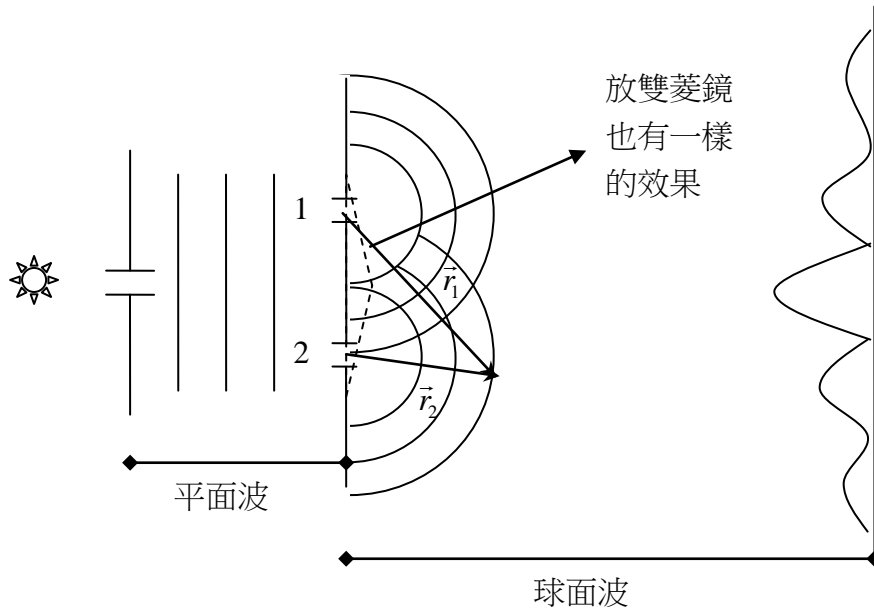
$$[X, P] = XP - PX = i\hbar I$$

(I) 有負數 $i = \sqrt{-1}$ 出現

(II) 普朗克常數

(3)二元性的闡述

(1)光雙狹縫干涉(波動性)



$$k = \frac{\nu}{c}$$

所以波的疊加正比於 $e^{ikr_1} + e^{ikr_2}$

$$\begin{aligned} \text{亮度大小正比於 } |e^{ikr_1} + e^{ikr_2}|^2 &= (e^{ikr_1} + e^{ikr_2})(e^{-ikr_1} + e^{-ikr_2}) = 1 + 1 + e^{ik(r_1-r_2)} + e^{-ik(r_1-r_2)} \\ &= 1 + 1 + 2\text{Cos}(k(r_1 - r_2)) = 4\text{Cos}^2(k(\frac{r_1 - r_2}{2})) \end{aligned}$$

所以

$$k(\frac{r_1 - r_2}{2}) = N\pi \quad \text{亮線}$$

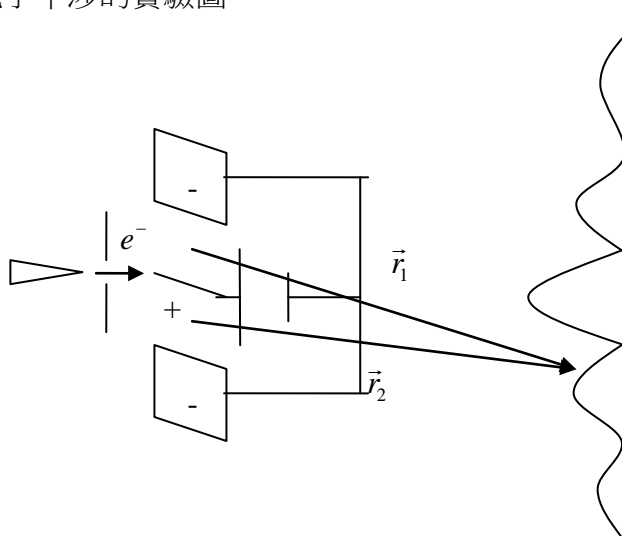
$$= (N + \frac{1}{2})\pi \quad \text{暗線}$$

另外有實驗室將光的亮度一直降低，直到每一瞬間只射出一個光子，在感光底片上一次只會有一個亮點，但長期累積仍然會出現干涉條紋，也就是說是自己跟自己干涉。

若在雙狹縫的位置放雙菱鏡也可以有一樣的效果

(II) 物質波動性

電子干涉的實驗圖



也是將電子一顆一顆打出來，每一瞬間只有一個電子打到螢光幕，但是累積起來也是有亮暗紋的產生，為波的性質。

$$\psi_1 \sim e^{ikr_1}$$

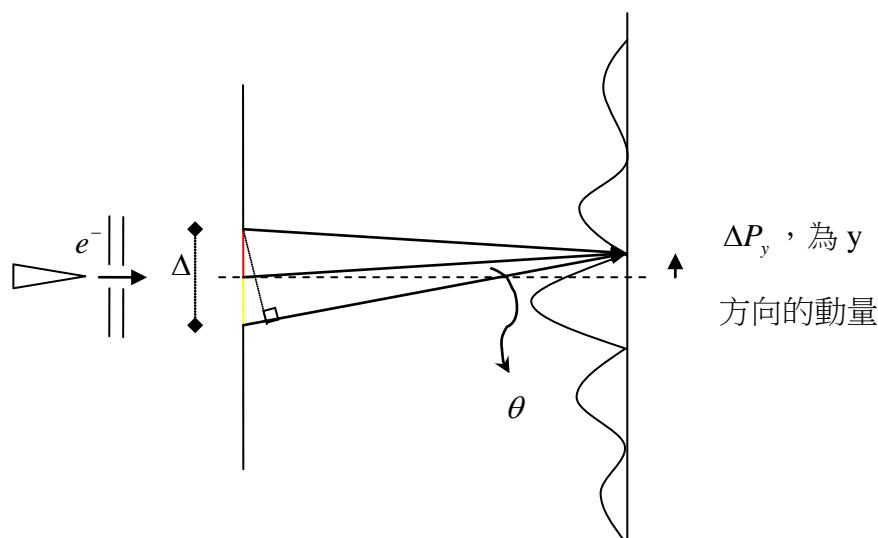
$$\psi_2 \sim e^{ikr_2}$$

$$\text{波的疊加} \sim \psi_1 + \psi_2 \sim e^{ikr_1} + e^{ikr_2}$$

$I \sim (\psi_1 + \psi_2)(\bar{\psi}_1 + \bar{\psi}_2) = \psi_1\bar{\psi}_1 + \psi_2\bar{\psi}_2 + \psi_1\bar{\psi}_2 + \psi_2\bar{\psi}_1$ ，其中 $\psi_1\bar{\psi}_2 + \psi_2\bar{\psi}_1$ 給出亮暗紋的現象

那是否我們可以將電子入射得動量和位置都測量得很精確呢？

(III) 電子單狹縫繞射



可以利用將 Δ 縮小的方式來達到精確測量電子入射的 y 座標的目的，但是我們知道當狹縫縮小時，繞射的圖形會變寬，可由第一暗紋來看

若要產生第一條暗紋，則紅色區塊必須要和黃色區塊相消，也就是說，黃色區塊的最底點要和紅色區塊的最底點差向位 π ，而黃色區塊的最頂點要和紅色區塊的最頂點也要差向位 π 。

所以 $\Delta \sin(\theta) = \lambda$

而 $\frac{\Delta P_y}{|\vec{P}|} = \sin(\theta)$ ，所以 $\Delta P_y = |\vec{P}| \sin(\theta) = \frac{h}{\lambda} \sin(\theta)$

令 $\Delta = \Delta y$

則 $\Delta y \Delta P_y = \frac{\lambda}{\sin(\theta)} \frac{h}{\lambda} \sin(\theta) = h$

所以若要電子入射的 y 座標知道得很準確 (Δy 小)，則 y 方向的動量的不確定度則會很大 (ΔP_y 大)，反之亦然。

在量子力學中這可用 $[Y, P_y] = i\hbar$ 和 Cauchy - Schwarz inequality 證明

此原理為海森堡的測不準原理(1925)，及同一方向上的位置和動量不可能同時測得很精確，這和牛頓力學中同一方向上的位置和動量可以同時測得很精確是不一樣的。