普通物理學甲下
課程筆記

三十一：空腔輻射能量分佈公式(黑體輻射)

授課教師：台灣大學物理系　易富國教授

筆記編寫：台灣大學物理系　楊淵棨同學

編者信箱：r01222074@ntu.edu.tw

上課學期：98 學年度第二學期

摘要

(1)簡介

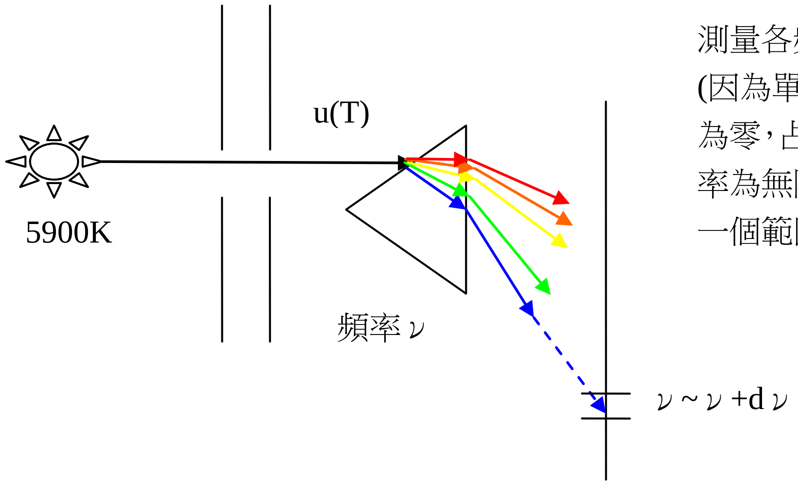
(2) 1879 STEPHANE-BOLTZMANN 定律

(3)Wien 定理

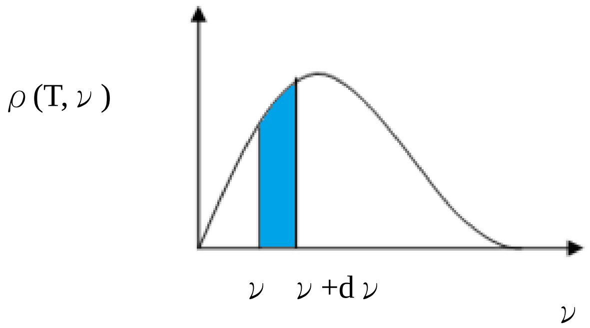
(4)猜 $f(\frac{\nu}{T})$ 的型態**:**

(1)簡介

牛頓引進太陽光至暗室利用三菱鏡分光



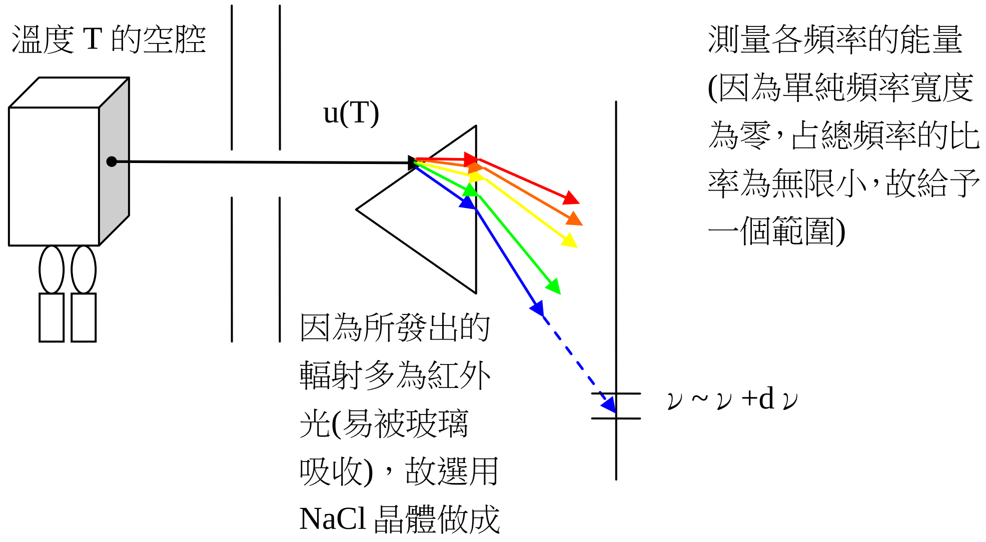
測量各頻率的能量(因為單純頻率寬度為零,占總頻率的比率為無限小,故給予一個範圍)

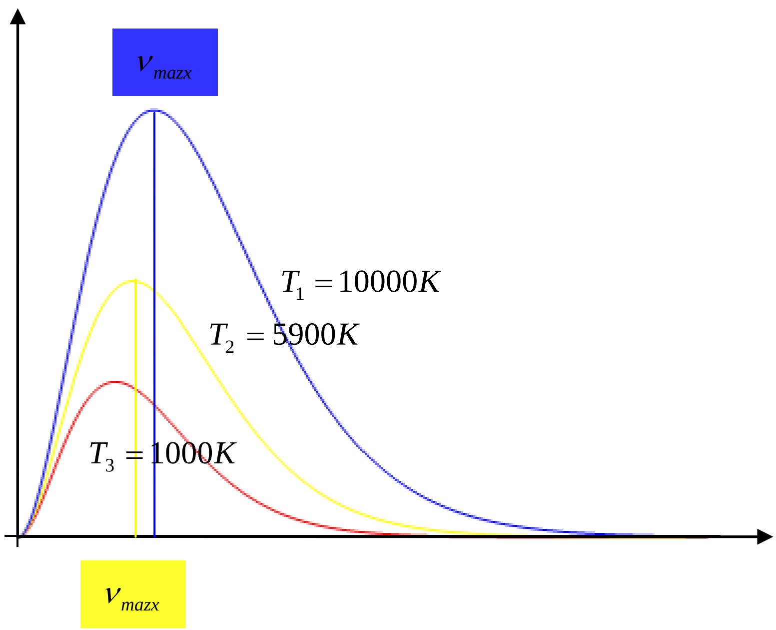


在太陽的頻譜中，T=5900K

藍色面積即為光頻率落在ν到ν+dν間的能量，若在分光前較測量能量，則可得

總能量密度$u(T)=\int_0^\infty \rho(T,\nu)d\nu$





黑體輻射的歷史:

1859 Kirchhoff	進行光的頻譜與能量關係的研究
1879 STEPHANE 1884 BOLTZMANN	用熱力學倒出 $u(T) \propto T^4$
1895 Wien	Wien 位移定律: (1) $\frac{\nu_{maz}}{T} =$ 定值 (可以從窯最亮的顏色看出窯的溫度) (2) $\rho(T,\nu) = \nu^3 f(\frac{\nu}{T}) \Rightarrow \frac{\rho(T,\nu)}{\nu^3} = f(\frac{\nu}{T})$

	1911 年諾貝爾獎
1900 Planck	Planck 黑體輻射公式: $\rho(T,\nu)d\nu = \frac{8\pi\nu^2}{c^3}d\nu \frac{h\nu}{[e^{\frac{h\nu}{kT}}-1]}$ 為打開近代物理的一把鑰匙 其中，k 為波茲曼常數，由 Planck 於 1900 年利用黑體輻射第一次量到，還有 $h = 6.626\times10^{-34} J\cdot s$ 普朗克常數，為開啟近代物理的一把鑰匙 1918 年諾貝爾獎

Wien 位移定律，1913 諾貝爾獎

愛因斯坦從黑體輻射之公式看出光的粒子性，1921 諾貝爾獎

密利根因為測量愛因斯坦光電效應，於 1921 年得到諾貝爾獎

康普敦效應證明光的粒子性，於 1927 年得到諾貝爾獎

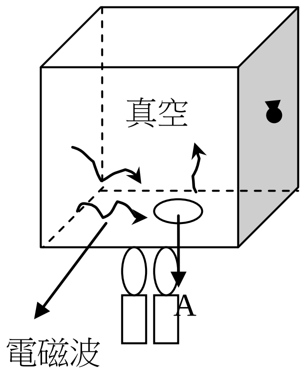
貝爾實驗室於 1960 年代測量出宇宙背景輻射(2.73K)，1978 年得到諾貝爾獎

1990 年代發現宇宙有稍微偏離 2.73K 的輻射，2006 年得到諾貝爾獎

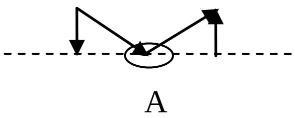
(2) 1879 STEPHANE-BOLTZMANN 定律

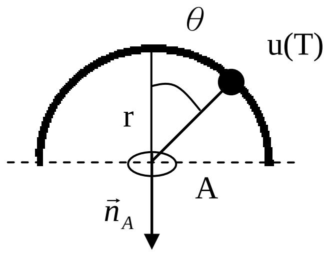
總能量密度 $u(T) \propto T^4$

溫度 T 的空腔



動量轉換，給予 A 光壓= $\frac{1}{3}u(T)$





能量流= $cu(T)\dfrac{\frac{ACos(\theta)}{r^2}}{4\pi}$

動量改變= $cu(T)\dfrac{\frac{ACos(\theta)}{r^2}}{4\pi}2Cos(\theta)$

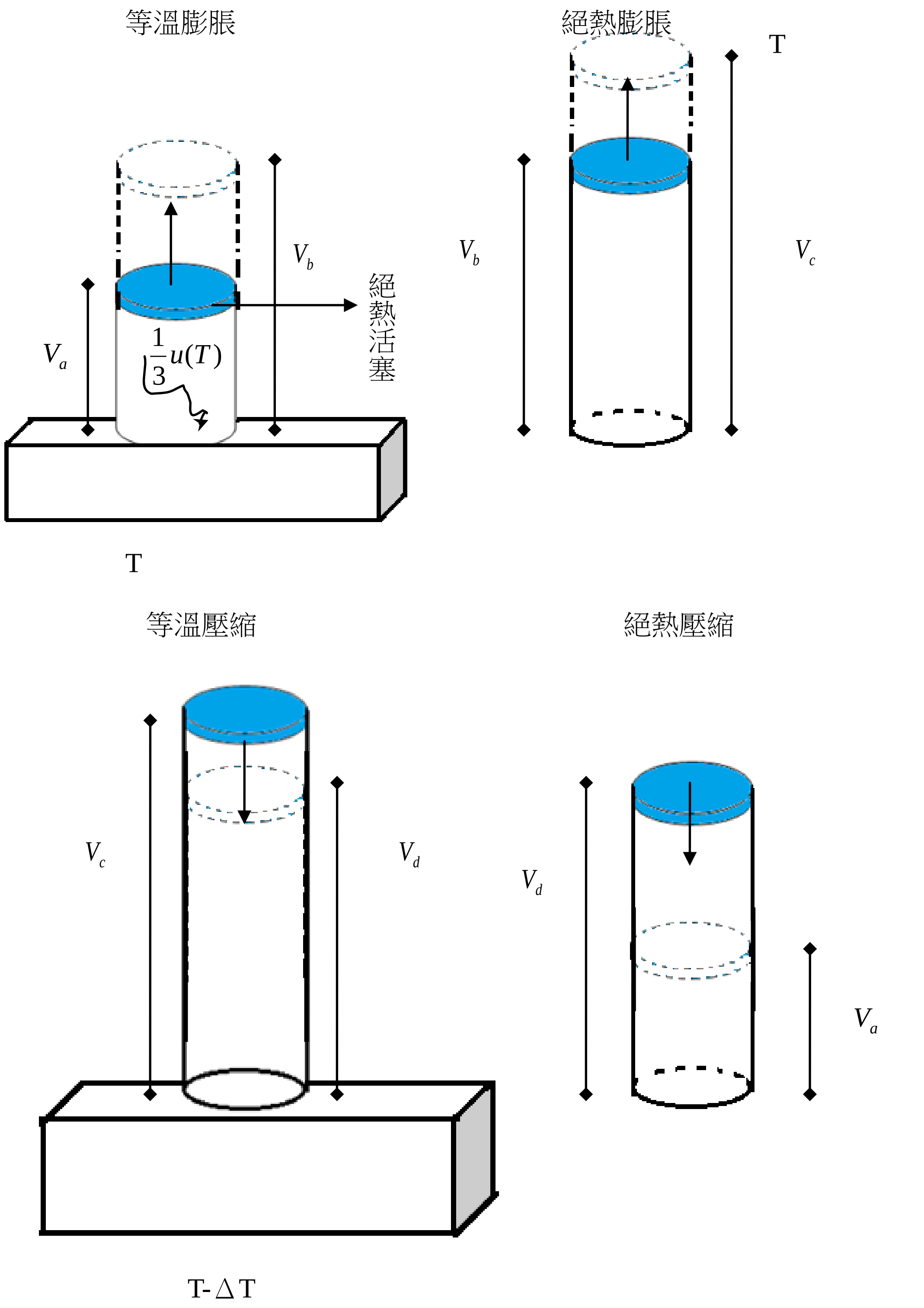
所以，單位時間內總的動量改變為

$$\frac{1}{c}\int_0^{\frac{\pi}{2}} cu(T)\frac{\frac{ACos(\theta)}{r^2}}{4\pi}2Cos(\theta)2\pi rSin(\theta)rd\theta$$

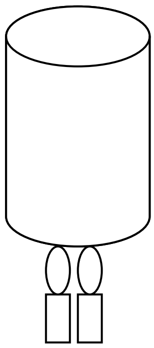
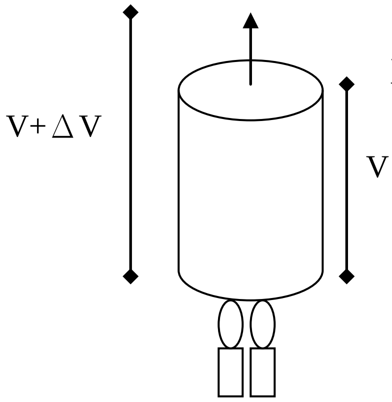
$$= u(T)A\int_0^{\frac{\pi}{2}} Cos^2(\theta)Sin(\theta)d\theta = \frac{1}{3}u(T)A$$

所以光壓為 $\frac{1}{3}u(T)$

卡諾熱機，但不是充滿氣體，是充滿輻射(真空)



注意:在等溫膨脹時，熱輻射將高溫熱庫的熱帶入，同時也補充熱機工作的媒介(在一般的卡諾熱機則為氣體時)

 V 定值 T→T+ΔT	所以內能從 U=V u(T)上升至 U=Vu(T+ΔT)， 所以 Q=ΔU=V(u(T+ΔT)- u(T)) 而定容比熱則為 $C_v = V\dfrac{d}{dT}(u(T+dT)-u(T))$
T 定值(其實就是定壓) V→V+ΔV 	$\Delta U = \Delta Q - P\Delta V = \Delta Q - \dfrac{1}{3}u(T)\Delta V$ $\Delta Q = \Delta U + \dfrac{1}{3}u(T)\Delta V$ $= u(T)\Delta V + \dfrac{1}{3}u(T)\Delta V$ $= \dfrac{4}{3}u(T)\Delta V$

注意，現在有 $\dfrac{C_p}{C_v} = \dfrac{4}{3} = \gamma$ ，所以 $PV^{\frac{4}{3}}$ 為定值

(或著可以這樣證明:

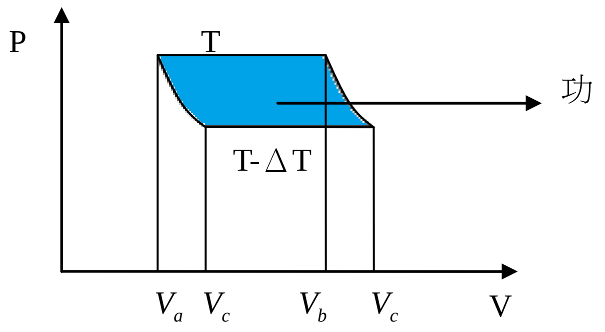
在絕熱膨脹中 Q=0，所以有

$$0 = dU + PdV = d(u(T)V) + (\frac{1}{3}u(T))V = Vdu(T) + u(T)dV + \frac{1}{3}u(T)dV = Vdu(T) + \frac{4}{3}u(T)dV$$

$$\Rightarrow \frac{du}{u} = -\frac{4}{3}\frac{dV}{V}$$

$\Rightarrow \ln u = -\dfrac{4}{3}\ln V + C$ ，C 為一常數

$\Rightarrow uV^{\frac{4}{3}}$ 為定值，而因為 $P(T) = \dfrac{1}{3}u(T) \propto u$ ，所以 $PV^{\frac{4}{3}}$ 為定值。)



注意:藍色面積相當於一個平行四邊形的面積，也就是

$W = (P(T+\Delta T) - P(T))(V_b - V_a)$

$\frac{Q_H}{T_H} = \frac{Q_L}{T_L}$ ，其中 $T_H = T, T_L = T - \Delta T$

熱機的功率 $\eta = \frac{Q_H - Q_L}{Q_H} = \frac{W}{Q_H} = 1 - \frac{Q_L}{Q_H} = 1 - \frac{T_L}{T_H} = 1 - \frac{T - \Delta T}{T} = \frac{\Delta T}{T}$

$$= \frac{\Delta V \Delta P}{\Delta V \frac{4}{3} u(T)} = \frac{\Delta V (\frac{1}{3} \Delta u)}{\Delta V \frac{4}{3} u(T)} = \frac{1}{4} \frac{\Delta u(T)}{u(T)}$$

其中

$\Delta V = V_b - V_a, \Delta P = P(T+\Delta T) - P(T) = \frac{1}{3}(u(T+\Delta T) - u(T)), Q_H = \Delta V \frac{4}{3} u(T)$(定壓膨脹)

所以可得

$\frac{1}{4} \frac{\Delta u(T)}{u(T)} = \frac{\Delta T}{T}$

兩邊積分，則得到

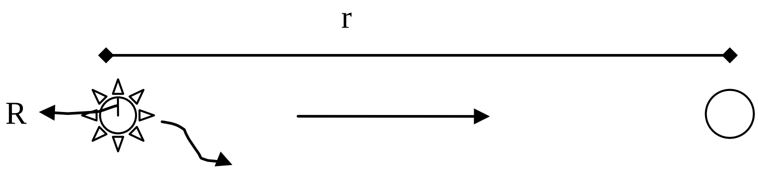
$\frac{1}{4} \ln(u(T)) = \ln(T) + b$ ，b 為一常數

$\Rightarrow \ln(u(T)) = 4\ln(T) + 4b$

$\Rightarrow u(T) = aT^4$ ， $a = b^4$

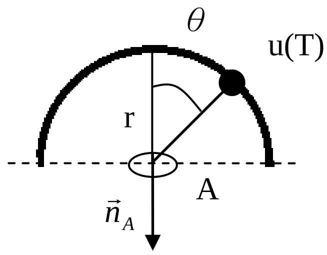
將類似的方法套用在蒸氣上，則可得蒸氣壓的公式。

接著，嘗試從 Solar Constant 來求太陽的溫度



$A = 4\pi R^2$　　Solar Constant $= 1.37\, {kW}/{m^2}$

假設 A 為一個洞，先求從 A 通過的能量:



$$\text{能量流} = cu(T)\frac{\frac{ACos(\theta)}{r^2}}{4\pi}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} cu(T)\frac{\frac{ACos(\theta)}{r^2}}{4\pi} 2\pi r Sin(\theta) r d\theta$$

$$= \frac{1}{2}u(T)Ac\int_0^{\frac{\pi}{2}} Cos(\theta)Sin(\theta)d\theta = \frac{c}{4}u(T)A$$

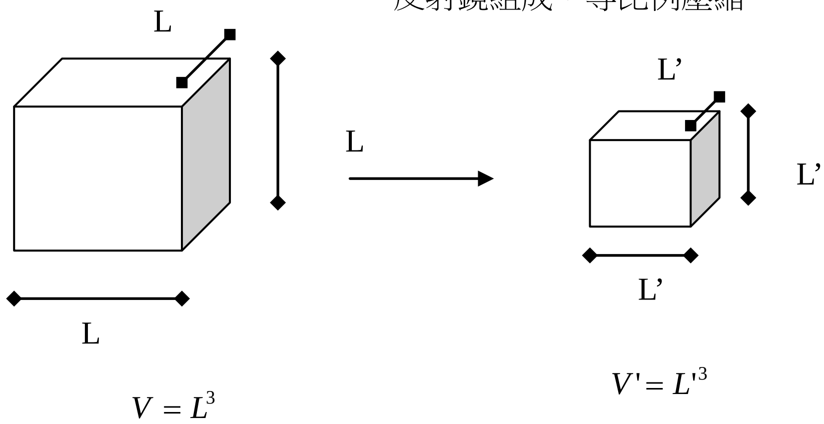
所以

$$4\pi R^2 \frac{c}{4}u(T) = 4\pi r^2 1.37 \Rightarrow T \cong 6000K$$

同樣的，地球也會散熱，而這些所散失的熱量可以由太陽所輻射的熱所補充

(3)Wien 定理

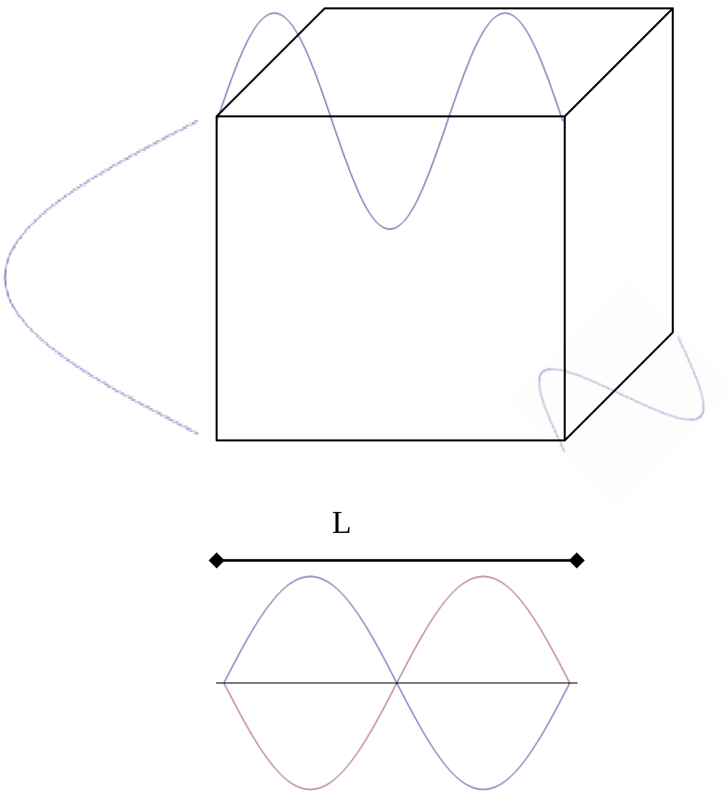
空腔為正立方體，由完美的
反射鏡組成，等比例壓縮



絕熱壓縮，PV^{γ} 為定值，若以輻射為介質 γ =4/3

$$PV^{\frac{4}{3}} = \frac{1}{3}u(T)L^4 = \frac{1}{3}aT^4L^4 = \frac{1}{3}aT'^4L'^4 \Rightarrow TL = T'L'$$

因為空腔由完美的反射鏡組成，剩下能在立方體內的電波為駐波



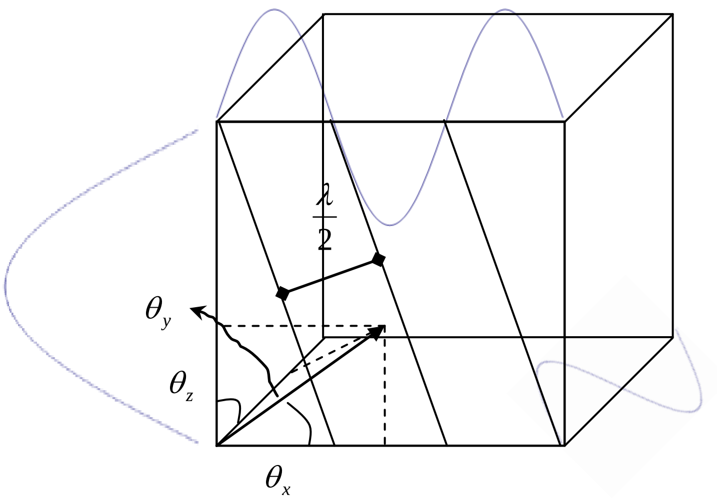
先就一維來看

$Cos(wt-kx)-Cos(wt+kx)=2Sin(wt)Sin(kx)$

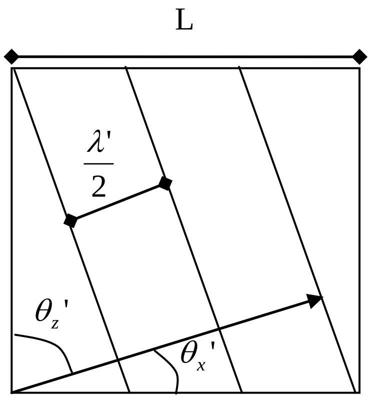
而因為駐波的兩端為節點，k 要符合關係式 $k=\dfrac{n\pi}{L},n=1,2\ldots$

相通的，三維的要符合

$k_x=\dfrac{n_x\pi}{L},k_y=\dfrac{n_y\pi}{L},k_z=\dfrac{n_z\pi}{L},n_x,n_y,n_z=1,2\ldots$



或著可以用二維的平面做一個比較簡單的說明:我們把波投影在 x-z 平面上



所以，

$\dfrac{\lambda'}{2}n_x'=LCos(\theta_x')$

$\dfrac{\lambda'}{2}n_z'=LCos(\theta_z')$

$\dfrac{\lambda}{2}n_x=LCos(\theta_x)\qquad \dfrac{\lambda}{2L}n_x=Cos(\theta_x)$

$\dfrac{\lambda}{2}n_y=LCos(\theta_y)\Rightarrow\dfrac{\lambda}{2L}n_y=Cos(\theta_y)\Rightarrow(\dfrac{\lambda}{2L}n_x)^2+(\dfrac{\lambda}{2L}n_y)^2+(\dfrac{\lambda}{2L}n_z)^2=1$

$\frac{\lambda}{2}n_z = LCos(\theta_z)$ $\quad\frac{\lambda}{2L}n_z = Cos(\theta_z)$

$\Rightarrow (\frac{c}{2L}\frac{1}{\nu})^2(n_x{}^2 + n_y{}^2 + n_z{}^2) = 1$

而在絕熱壓縮時，應有 $n_x' = n_x, n_y' = n_y, n_z' = n_z$

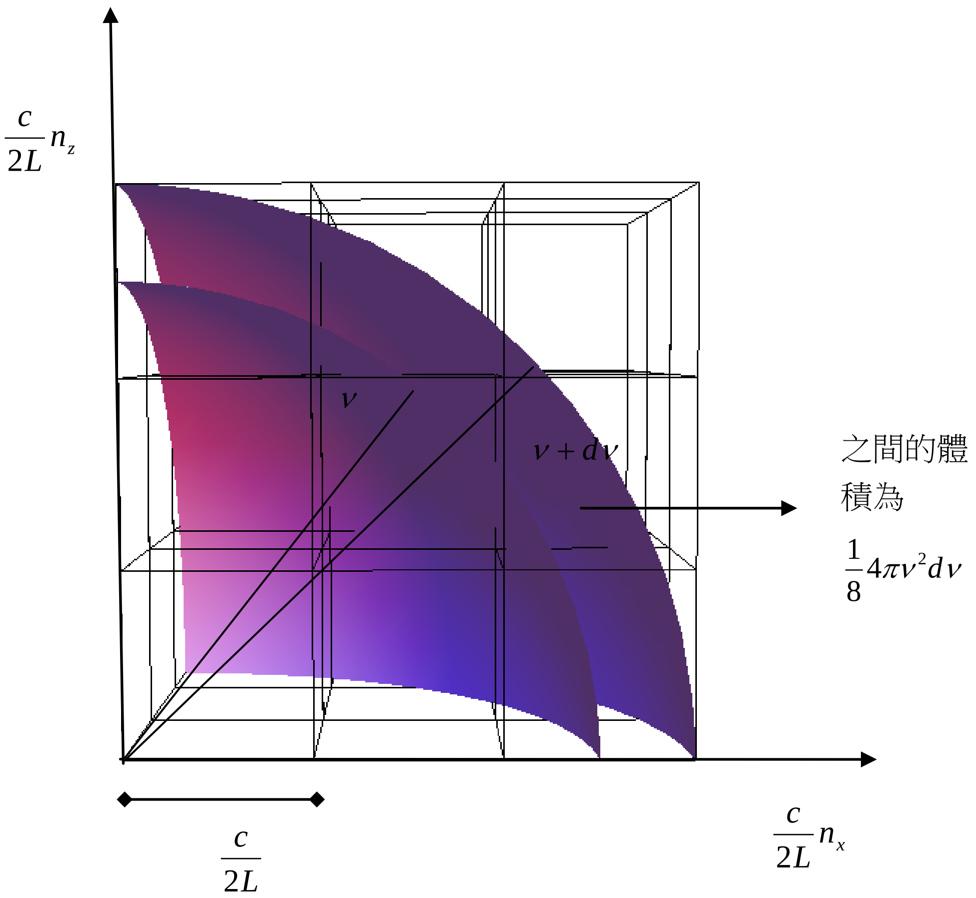
也有 $(\frac{c}{2L'}\frac{1}{\nu'})^2(n_x'^2 + n_y'^2 + n_z'^2) = 1$，所以駐波的頻率和長度成反比 $L\nu = L'\nu'$

也可以想成慢慢地壓縮，駐波受到移動鏡面反射的都普勒效應的影響，頻率漸漸上升

$\frac{L}{L'} = \frac{\nu'}{\nu} = \frac{T'}{T}$，所以頻率和溫度成正比

有多少不同型態駐波其頻率在ν→ν+dν

$(\frac{c}{2L})^2(n_x{}^2 + n_y{}^2 + n_z{}^2) = \nu^2$



所有的網格點為允許的駐波型態，若要算頻率為ν到ν+dν之間的駐波型態，可以畫兩個八分之一球，半徑分別為ν及到ν+dν，其中所包括的網格點即為ν到

ν +dν 之間的駐波型態:

$$\frac{\frac{1}{8}4\pi\nu^2 d\nu}{(\frac{c}{2L})^3}=\frac{L^3 4\pi\nu^2 d\nu}{c^3}$$ ，其中 $(\frac{c}{2L})^3$ 為一個晶格點所佔的體積

再加上有兩種不同的偏振方向，所以可以有的駐波型態為

$$\frac{L^3 8\pi\nu^2 d\nu}{c^3}$$

因為在絕熱過程中，駐波的形態被保留:

$$Ld\nu = L'd\nu'$$

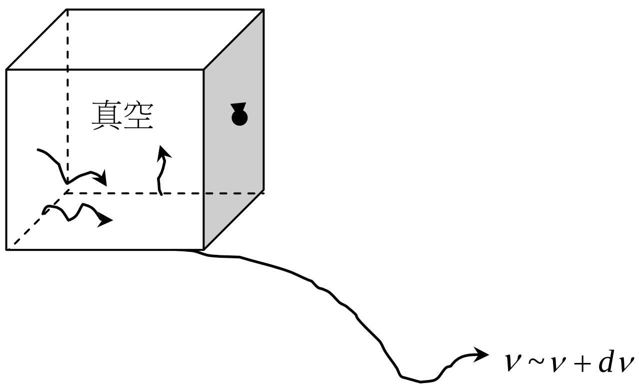
且

$$\frac{L^3 8\pi\nu^2 d\nu}{c^3}=\frac{L'^3 8\pi\nu'^2 d\nu'}{c^3}$$

所以

$\frac{L}{L'}=\frac{\nu'}{\nu}=\frac{T'}{T}=\frac{d\nu'}{d\nu}$ 在絕熱過程當中被保持

現在，假設空腔的四壁只會反射頻率為ν到ν +dν 之間的電磁波



其熱輻射能量密度為 $\rho(T,\nu)d\nu$

經過絕熱膨脹，因為 $\rho(T,\nu)d\nu$ 應該是正比於 T 四次方 $\frac{\rho(T,\nu)d\nu}{T^4}=\frac{\rho(T',\nu')d\nu'}{T'^4}$

且 $\frac{L}{L'}=\frac{\nu'}{\nu}=\frac{T'}{T}=\frac{d\nu'}{d\nu}$

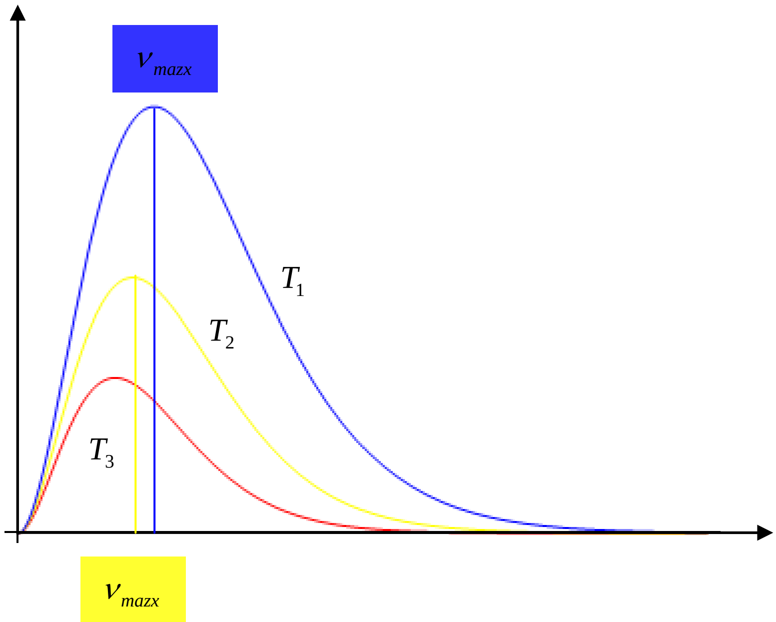
可推得 $\frac{\rho(T,\nu)d\nu}{\nu^4}=\frac{\rho(T',\nu')d\nu'}{\nu'^4}$

$\Rightarrow \frac{\rho(T,\nu)}{\nu^3}=\frac{\rho(T',\nu')}{\nu'^3}$ 此時，因為前式只跟 T 和ν有關係，而 $\frac{\nu}{T}$ 是固定的，故前

式應該可以表達成$\frac{\nu}{T}$的函數 $f(\frac{\nu}{T})=\frac{\rho(T,\nu)}{\nu^3}=\frac{\rho(T',\nu')}{\nu'^3}=f(\frac{\nu'}{T'})$

此結果即為 Wien 韋恩定理

Wien 定理證明-用 S.B.定理在 ν → ν +d ν 之能量密度



從T_2升高到T_3， ν_{mazx} 的型態仍然被保存

習題

假設 $f(\frac{\nu}{T})\rho(T,\nu)=\nu^3 f(\frac{\nu}{T})$ ， $u(T)=\int_0^\infty \rho(T,\nu)d\nu$

(1) 試證 $u(T)\propto T^4$

(2) $\frac{d\rho(T,\nu)}{d\nu}=0$ (也就是 $\rho(T,\nu)$ 發生極大值 $\rho(T,\nu_{\max})$ 之處)， $\frac{\nu_{\max}}{T}$ 為定值

(廣義的 Wien 定理)

(4)猜 $f(\frac{\nu}{T})$ 的型態:

總能量: $L^3\rho(T,\nu)d\nu=\frac{L^3 8\pi\nu^2 d\nu}{c^3}E(T,\nu)$

頻率為 ν 到
ν +d ν 的駐
波型態數量

每一頻率為
ν 的駐波的
平均能量

帶入 Wien 定理

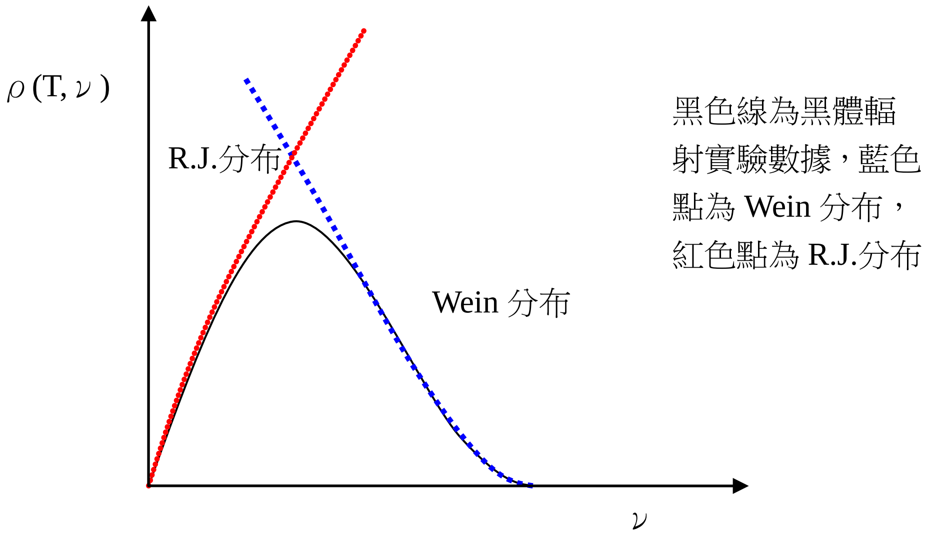
$$L^3\nu^3 f(\frac{\nu}{T})d\nu = \frac{L^3 8\pi\nu^2 d\nu}{c^3}E(T,\nu)$$

$$\Rightarrow \frac{E(T,\nu)}{\nu} = f(\frac{\nu}{T})\frac{c^3}{8\pi}$$

Wien 分佈

$E_{wein}(T,\nu) = \alpha\nu e^{-\beta\frac{\nu}{T}}$ ，α ，β 為未知，和馬克斯威爾粒子速率分布類似

高頻有不錯的結果，但是低頻則不行



Rayleigh-Jeans(R.J.)分佈

$E_{R.J.}(T,\nu) = kT = \nu f(\frac{\nu}{T})\frac{c^3}{8\pi}$ ，基於能量均分原理(k 為波茲曼常數，有 $\frac{1}{2}kT$ 動能和 $\frac{1}{2}kT$ 位能)

$$\Rightarrow f(\frac{\nu}{T}) = \frac{8\pi k}{c^3}\frac{T}{\nu}$$

$\Rightarrow \rho_{R.J.}(T,\nu)d\nu = \nu^3 f_{R.J.}(\frac{\nu}{T})d\nu = \frac{8\pi\nu^2}{c^3}d\nu kT$ =(單位體積內駐波的數目)×(平均能量)

(其實 1900 年 10 月以前普朗克就從實驗發現低頻時，$E_{R.J.}(T,\nu)$ 和 T 成正比)