請考生依指示
填寫准考證末兩碼

國立臺灣大學
109 年高中科學班資格測驗試題本
數學

—作答注意事項—

考試時間：共 120 分鐘（請自行斟酌分配時間）

作答方式：務必作答於「各科答案卷上」，請以黑色或藍色原子筆、鋼珠筆或中性筆作答，並標明題號。

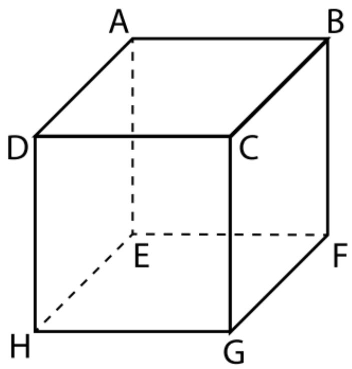
祝考試順利！

請聽到鈴(鐘)聲響後，於題本右上角方格內填寫准考證末兩碼，再翻頁作答。

第一題：(共 25 分)

如下圖, 一正方體有 8 個頂點、12 條稜（邊）、6 個面. 現有一平面 P 與此正方體相截, 且截面為一正六邊形.

1.（是非與簡答題）請回答對或錯, 並簡述其理由
   a. 平面 P 必須和 6 個面都相交, 並通過相交面的內部.
   b. 平面 P 不能包含任一條稜.
   c. 平面 P 不能通過任一頂點.
   d. 當平面 P 截割一面如 $ABCD$ 時. 則必同時交 $ABCD$ 的一雙鄰邊.
   e. 若平面 P 截割 AB 和 BC, 則平面 P 同時也截割 AE、CG、EH 和 HG.
2. 求證平面 P 必通過此正方體的中心.
3. 總共有幾個這樣的正六邊形？



第二題：(共 25 分)

算式 a^2+b^2, a^3+b^3 若交換 a, b 其結果不變, 稱為 a 和 b 的**對稱式**. 已知這樣的算式, 一定可以表示成**基本對稱式** $\sigma_1 = a+b$ 和 $\sigma_2 = ab$ 的算式. 例如

$$a^2+b^2 = (a+b)^2 - 2ab = \sigma_1^2 - 2\sigma_2,$$

$$a^3+b^3 = (a+b)^3 - 3ab(a+b) = \sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2.$$

已知一邊長為 a, b, c 的三角形面積 Δ 有下列對稱表示式

$$16\Delta^2 = 2a^2b^2 + 2b^2c^2 + 2c^2a^2 - a^4 - b^4 - c^4 \qquad (*).$$

已知 a, b, c 的基本對稱式為：

$$\sigma_1 = a+b+c; \quad \sigma_2 = ab+bc+ca; \quad \sigma_3 = abc$$

將 (*) 中的右式表示成 $m\,\sigma_1^4 + n\,\sigma_1^2\sigma_2 + p\,\sigma_1\sigma_3 + q\,\sigma_2^2$, 其中 m, n, p, $q \in \mathbb{R}$.

第三題：(共 25 分)

回答下列整數問題（若你想應用大定理, 請詳述該定理, 並充分說明應用該定理的方式與理由. 沒有說明者, 一律不計分）:

1. 找最小正整數 $p > 1$, 對任意整數 n, $10|(n^p - n)$ （亦即 10 整除 $n^p - n$）.
2. 找最小正整數 $q > 1$, 對任意整數 n, $70|(n^q - n)$.
3. 可以找到正整數 $r > 1$, 使得對任意整數 n, $100|n^r - n$ 嗎？

第四題：(共 25 分)

袋中有 20 顆球, 其中白球有 10 顆, 黑球有 10 顆. 現連續從袋中取球, 直到取到第 m 顆白球停止. 取球有兩種方式：

- **取出就放回**： 以隨機變數 $X_m = k$ 表示第 k 次取得第 m 顆白球的事件, $k = m, m+1, \cdots$.
- **取出不放回**： 以隨機變數 $\overline{X}_m = k$ 表示第 k 次取得第 m 顆白球的事件, $k = m, m+1, \cdots m+10$.

由於「取出不放回」的球數會逐漸減少

猜想：固定 m 時,「取出不放回」情況的期望值和變異數都會比「取出就放回」時小.

回答下列問題：

1. 求機率 $\mathsf{P}(X_m = k)$, 期望值 $\mathsf{E}(X_m)$, 變異數 $\mathsf{Var}(X_m)$.
2. 求機率 $\mathsf{P}(\overline{X}_m = k)$, 期望值 $\mathsf{E}(\overline{X}_m)$, 變異數 $\mathsf{Var}(\overline{X}_m)$.（提示：$\sum_{k=m}^{m+10} \mathsf{P}(\overline{X}_m = k) = 1$!）
3. 當 $m = 1, 2, \cdots, 10$ 時, 若固定 m, 上述的猜想正確嗎？

試題結束