

請考生依指示
填寫准考證末兩碼

| | |
|--|--|
| | |
|--|--|

國立臺灣大學
107 學年度高中科學班資格測驗試題本
數學

—作答注意事項—

考試時間：共 120 分鐘（請自行斟酌分配時間）

作答方式：務必作答於「各科答案卷上」，請以黑色或藍色原子筆、鋼珠筆或中性筆作答，
並標明題號。

祝考試順利！

請聽到鈴(鐘)聲響後，於題本右上角方格
內填寫准考證末兩碼，再翻頁作答。

第一題：(共 25 分)

(i)考慮三維空間，在 $z=1$ 的平面上有一個拋物線 $y=x^2$ 。收集所有通過原點與此拋物線上任一點的直線，得到一個集合 S 。試求 S 在空間中所畫出的曲面方程式。

(ii)將拋物線的方程式變動為 $\{z=c, y=x^2\}$ 時，且新的集合 S 在空間中所畫出的曲面方程式為一正圓錐，試求 c 。

(iii)在原點處放置一光源。假設於 $y+z=1$ 平面上有圖形 E ，且 E 經由原點光源在 $z=1$ 平面上的投影恰巧為 $\{z=1, y=x^2\}$ ，試求 E 的定義方程式。

(iv)是否可以不做任何計算，就得知上題中 E 的圖形為何？請說明原因。

第二題：(共 25 分)

某次選舉有兩位候選人，最後得票數為甲候選人 302 票，乙候選人 300 票。請問開票過程中甲候選人一路領先的機率為何？甲候選人一路不落後的機率為何？

第三題：(共 25 分)

我們稱兩正整數互質若其最大公因數為 1。另外已知兩正整數 m, n 互質若且唯若存在兩整數 p, q 使得 $pm+qn=1$ 成立。設 m, n 互質，對任意兩非負整數 $a, b, a < m, b < n$ ，證明存在整數 r 使得 r 除 m 餘 a 、除 n 餘 b 。並說明不同的解之間的關係。

第四題：(共 25 分)

已知一 n 次實係數多項式 $P(x)$ 有 n 個實根 $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ ，並滿足 $\alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \dots \leq \alpha_n$ 。證明 $P'(x)$ 的實根必落在閉區間 $[\alpha_1, \alpha_n]$ 。

試題結束