分析二 臺大數學系 齊震宇 教授

- 課程概要

  本課程為 104 學年度【微積分一、二】(數微)以及 105 學年度【分析一】的延續；同時，在過程中亦將使用上述諸課程的各種內容，建議有興趣的朋友先參考相關的課程網頁：

  https://nol.ntu.edu.tw/nol/coursesearch/print_table.php?course_id=201%2049580&class=&dpt_code=2010&ser_no=79958&semester=104-2&lang=CH

  https://nol.ntu.edu.tw/nol/coursesearch/print_table.php?course_id=221%20U6540&class=&dpt_code=2010&ser_no=19457&semester=105-1&lang=CH

  其中有列一些相關資源的連結，請多加利用。

【分析二】預計談論的主題如下

(1) 測度論

在【分析一】中我們介紹了一般測度空間與可測函數的概念，談論了 Lebesgue 積分在取函數列極限時的特性(Lebesgue 的單調收斂定理與控制收斂定理、Fatou 引理)、利用外測度來構造測度(Carathéodory 構造)以及測度空間的積空間上的測度與積分理論(Fubini-Tonelli 定理)。在本學期的課程中，我們將繼續下述主題：

(1a) 一些可測函數構成的空間：Lp 空間的完備性、Hölder 不等式、Minkowski 不等式；Lp 空間也是 Banach 空間最基本的例子。

(1b) 測度與拓樸：當測度空間本身具有拓樸且所有開集都為可測集時，自然希望了解它是否具有與拓樸結構高度相關的測度，例如測度的各類內、外正規性。我們將會介紹在局部緊緻 Hausdorff 空間上構造極具正規性的測度的方法ー

Riesz 表現定理。作為一個應用，我們可以由 Darboux-Riemann 積分給出 Lebesgue 測度的另一個構造方式。

(1c) 廣義測度：放寬(正)測度要取非負實數值的條件，我們考慮取值為擴充實數或複數的可數加性函數的性質，進而得到所謂有號測度與複測度的觀念。在很一般的條件下，這些廣義測度能夠唯一地分解為一些有特殊性質的正測度的組合。我們將會介紹廣義測度相對一個正測度的絕對連續性與奇異性、Hahn 分解(以正負號為考量)、Lebesgue 分解(以絕對連續與奇異性為考量)、Radon-Nikodym 定理(絕對連續性與可積性的關聯)。

(1d)歐氏空間上微分與積分間的關係：微積分基本定理聯繫了求導與求和兩種互逆的操作，是整個微分與積分理論的樞紐；此外，微分可以視為一種「密度」的概念，積分的變數變換(jacobian)公式更是許多計算的基礎。我們將探討測度間的相對微分(密度的推廣)與可積函數的關係─Lebesgue 微分定理、微積分基本定理(到底對多大一類函數成立？絕對連續函數的觀念)以及十分一般的積分變數變換定理。

(2) 流形(manifold)上的微積分

歐氏空間(母空間)中的曲線與曲面可以局部地描述為一維與二維歐氏空間中的開集，很多討論可以不依賴於它們「擺放」在母空間中的方式。將此想法抽象化，我們引入微分流形的觀念，它們是幾何學研究的基礎物件。我們會談論的主題如下：

(2a) 微分流形與可微映射：歐氏空間與可微函數的推廣。

(2b) 切空間與切映射：過往我們都將歐氏空間中的曲面的切向量描述為母空間中的一個向量，但沒有了母空間觀念的流形上仍舊可以內在地定義切向量的概念。如同歐氏空間的情況，可微映射會導出切向量空間(切空間)的線性映射，同時有相應的 chain rule 與反函數定理。

(2c) 張量與微分形式(differential form)：張量是向量場概念的一種抽象推廣，由在流形諸點的切空間上考慮多重線性代數物件而得。流形上的反對稱張量又稱

微分形式，可以在流形中適當的子物件上「被積分」。我們將會把向量分析中 Green-Gauss 定理與旋度定理推廣到流形上，得到一般的 Stokes 定理。

(2d)流形上的微積分與拓樸：利用微分形式的外微分(exterior differentiation)可以得出流形的一些拓樸不變量。我們將介紹流形的 de Rham 上同調的基本概念。

(3) 泛函分析

許多函數空間上有自然的距離函數或至少有自然的拓樸結構，研究拓樸向量空間的基本性質便是(線性)泛函分析主軸。我們將談論

(3a) 拓樸向量空間的一般概念：有界集、均衡集與凸集、基礎鄰域(neighborhood)系、有限維拓樸向量空間的唯一性、可距性、局部凸性與半範(seminorms)、Heine-Borel 性。

(3b) 完備性與連續線性映射：Baire 定理、Banach-Steinhaus 一致有界原理、開映射定理、閉圖形定理。

(3c) 線性拓樸空間中的對偶空間：分離性、連續線性函數、弱拓樸、弱有界性與弱緊緻性。

(3d) 分佈理論：分佈是一種歐氏空間開集上的廣義函數，可以對它們施行微分的操作(仍舊得到一個分佈)，是討論微分算子的一個良好的範疇，讓我們得以有微分方程的弱解的觀念。我們還會討論歐式空間上分佈的卷積(convolution)，它們提供了將函數光滑化的一種途徑。

選擇性題材：

(A) 拓樸群上的不變測度與抽象調和分析：Fourier 級數研究周期函數，而周期函數可視為 S^1(單位長複數)這個拓樸群上的函數。我們將證明一般拓樸群上的左平移不變測度(Haar measure)的存在性，並談論它們的基本性質。如果時間允許，我們將討論可換拓樸群上的調和分析，如 Pontrygin 對偶定理與 Bochner

定理。

(B)基礎機率論：機率分佈與隨機變數的收斂、大數法則、中央極限定理、無窮可除分佈。

(C)線性橢圓偏微分算子：這是一類人們理解較多其基本性質的算子，典型的例子是歐氏空間中的 Laplace 算子。幾何學的研究中有許多基礎的物件與這些算子有聯繫。我們將討論它們的正則性。

- 課程要求

  104 學年度【微積分一、二】與 105 學年度【分析一】中的部分課程有絕對的必要性。我們假設聽眾「相當」熟悉集合與映射的操作與思考。此外，一些多變數微積分、點集拓樸與測度論的知識是必備的，例如【微積分二】中的反函數定理與【分析一】中所有關於點集拓樸與測度論的所有內容，大部分都有影片可參考：

  微積分一：
  https://www.youtube.com/playlist?list=PLVJXJebpO4PhAc21JW-cYbzT3sq4s7Qg8

  微積分二：
  https://www.youtube.com/playlist?list=PLiI-R4o6jmGihq7XzdNzb0d5hHqEJbr6L

  分析一：
  https://www.youtube.com/user/NTUCASE/playlists

  最後，最重要的是要有一顆為了追求真理而不畏挫折的心。我可以保證這會是一門讓大家充滿挫折的課唷。：)

- 参考書目

  (1) 測度論

  Cohn, Measure Theory

  Rudin, Real and Complex Analysis

  (2) 流形上的微積分

  Bott and Tu, Differential Forms in Algebraic Topology

  Bredon, Topology and Geometry

  de Rham, Differentiable Manifolds

  (3) 泛函分析

  Rudin, Functional Analysis

  (4) 調和分析

  Rudin, Fourier Analysis on Groups

  (5) 機率論

  Gnedenko and Kolmogorov, Limit Distributions for Sums of Independent Random Variables

  Itô - Stochastic processes

- 指定閱讀

  Rudin, Real and Complex Analysis, Ch1,2,3,6,7,8

  Rudin, Functional Analysis