

請考生依指示
填寫准考證末兩碼

--	--

國立臺灣大學
105 學年度高中科學班資格測驗試題本

數學

—作答注意事項—

考試時間：共 120 分鐘（請自行斟酌分配時間）

作答方式：務必作答於「各科答案卷上」，請以黑色或藍色原子筆、鋼珠筆或中性筆作答，
並標明題號。

祝考試順利！

請聽到鈴(鐘)聲響後，於題本右上角方格
內填寫准考證末兩碼，再翻頁作答。

第一題 (共 25 分)

3 月 26 日早晨在烏石港看日出，太陽是從龜山島右邊還是左邊出現在海平面上？

解釋你的答案。已知

烏石港： 經度： $121^{\circ} 50' 26''$ E, 緯度： $24^{\circ} 52' 9''$ N

龜山島： 經度： $121^{\circ} 57' 6''$ E, 緯度： $24^{\circ} 50' 31''$ N

第二題 (共 25 分)

坐標平面上有一條曲線，該曲線上各點的切線，除了 $x = 0$ 之外，都可寫成底下的方程式：

$$y = mx + \frac{1}{m}, \quad m \neq 0, \text{ 和 } x = 0$$

- (1) 求這條曲線的方程式。
- (2) 這條曲線是拋物線、橢圓，還是雙曲線？

第三題 (共 25 分)

已知 $y = f(x)$ 是一 4 次多項式函數， x^4 項係數為 1，且其函數圖形與 x -軸相切於 $(0, f(0))$ 與 $(1, f(1))$ 。

- (1) 可否證明 $f(x) \geq 0$ ？若可以，請證明。
- (2) 可否證明 $f'(x) = 0$ 有 3 相異實根？若可以，請證明。
- (3) $f(x)$ 有幾個反曲點？為什麼？

第四題 (共 25 分)

有一公平硬幣，令隨機變數 $X = k, k = 1, 2, \dots$ ，表示「丟到第 k 次才第一次出現正面」的事件。

- (1) (暖身題) 計算機率 $P(X = k)$ ，驗證 $\sum_{k=1}^{\infty} P(X = k) = 1$ ，並求出期望值

$$E(X) = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot P(X = k)$$

- (2) 令隨機變數 $Y = k, k = 2, 3, \dots$ 表示「丟到第 k 次才第一次連續出現兩正面」的事件。說明 $P(Y = k) = c_{k-2} \cdot \frac{1}{2^k}, k = 2, 3, \dots$ 。其中 $c_{n+2} = c_{n+1} + c_n, n = 0, 1, 2, \dots$ ，且 $c_0 = c_1 = 1$ 。(即 c_n 為費氏數列 $1, 1, 2, 3, 5, \dots$)
- (3) 已知費氏數列 c_n 之公式如下，計算期望值 $E(Y)$ 。

$$c_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} \right), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

試題結束