

國立臺灣大學
104 學年度高中科學班資格測驗試題本
數學

—作答注意事項—

考試時間：共 120 分鐘（請自行斟酌分配時間）

作答方式：務必作答於「各科答案卷上」，請以黑色或藍色原子筆、鋼珠筆或中性筆作答，並標明題號。

(1) 一均勻圓柱容器重 500 公克，容器內部底面積為 100 平方公分，高 40 公分（為方便起見，假設底面沒有厚度），其重心高度顯然離地底面 20 公分，現注入普通水後，容器和水全體的重心會先下移然後再往上，最後水滿時，重心又回到原來離底面 20 公分高的位置，問重心最低時離底面有多高？

(2) 平面上有一質點 P 繞 O 逆時鐘做等速圓周運動， $\overline{OP} = 2$ ，週期 2π 。另有一質點 Q 繞 P 逆時鐘做等速圓周運動， $\overline{PQ} = 1$ ，週期 $\frac{2}{3}\pi$ 。當時間 $t=0$ 時，P 在 $(2, 0)$ ，Q 在 $(3, 0)$ ，回答下面問題：

- (a) Q 繞 O 的週期是多少？
- (b) 求出 Q 繞 O 時，最靠近 O 和最遠離 O 的位置坐標。
- (c) Q 繞 O 的軌跡有沒有自交的点，如果有，請描述發生的位置。

(3) 將三度空間中的 x-y 平面視為一張無限延伸的白紙，並在 $(0, 0, 1)$ 處放置一個點光源。

- (a) 給定空間中一點 (x_0, y_0, z_0) 滿足 $1 > z_0 \geq 0$ ，請問此點被光照射投影在 x-y 平面上的陰影點的座標為何？（以 x_0, y_0 與 z_0 表示）
- (b) 假設 a, b, c, d 為實數且 $abc \neq 0$ ，考慮滿足 $ax + by + cz = d, x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$ 與 $z \geq 0$ 的交集稱為 P，並假設 P 是不透光材質，請針對 a, b, c, d 的各種可能，描述 P 在此光源照射投影於 x-y 平面所形成的陰影形狀。

(4) 試求兩個正有理數，使得兩數的立方和為 6。你可以運用自己喜歡的解題方式，或者也可依照下列步驟解題。

- (a) 說明本題相當於：「存在兩兩互質的正整數 a, b, c，使得 $a^3 + b^3 = 6c^3$ 。」
- (b) 證明 $a + b$ 為 6 的倍數。
- (c) 設 $a + b = 6k$ ，證明 c 為 3 的倍數，k 為 9 的倍數。
- (d) 令 $c = 3l, k = 9m$ ，找出某一組 (l, m) 滿足所求。