

國立臺灣大學
103 學年度高中科學班資格測驗試題本
數學

—作答注意事項—

考試時間：共 80 分鐘（請自行斟酌分配時間）

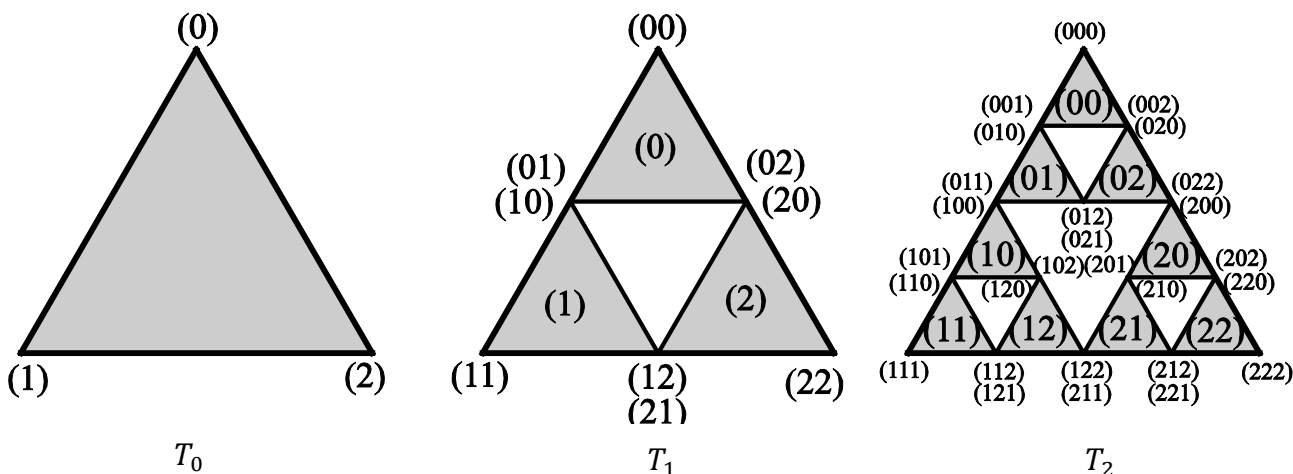
作答方式：務必作答於「各科答案卷上」，請以黑色或藍色原子筆、鋼珠筆或中性筆作答，並標明題號。

祝考試順利

說明：以下有兩大題的題目，請根據題目敘述作答，並詳述答題理由。答案務必寫在答案卷上，否則將予扣分；並於題號欄標明題號一,二,(1),(2).....，題號後標示之百分比(如：【10%】)為配分。

一、

正三角形區域連接三邊中點所得的三角形區域的內部，稱為此三角形區域的**內三角形**。設 T_0 是一邊長為 1 的正三角形區域。從 T_0 挖除其內三角形，剩下的區域稱為 T_1 ，其中 3 個兩兩交於一點的三角形區域，依上、左下、右下的順序命名為 (0)、(1)、(2)（如下中圖）。



再用上面的操作，從這 3 個三角形區域挖除其各自的內三角形後，剩下的區域稱為 T_2 ，並命名如上右圖。一般而言， T_{n+1} 是從 T_n 中各個三角形區域，挖除其各自的內三角形後所剩下的區域，而且三角形區域 $(a_1a_2 \dots a_n)$ ， $a_i = 0, 1, 2$ ，挖除內三角形後所剩下的區域，依上、左下、右下的順序命名為 $(a_1a_2 \dots a_n0)$ 、 $(a_1a_2 \dots a_n1)$ 、 $(a_1a_2 \dots a_n2)$ 。我們也用 $(a_1a_2 \dots a_n0)$ 、 $(a_1a_2 \dots 1)$ 、 $(a_1a_2 \dots a_n2)$ 標示三角形區域 $(a_1a_2 \dots a_n)$ 的上、左下、右下三頂點。注意， T_n 除了最上方、最左下方、最右下方這 3 個頂點外，其他頂點都有兩個名稱。

- (1) 【10%】求 T_n 的面積及周長。
- (2) 【10%】求 T_n 中，三角形區域的數目及頂點數。例如： T_1 中有 3 個三角形區域及 6 個頂點。
- (3) 【10%】求同一頂點的兩種名稱 $(a_1a_2 \dots a_n)$ 和 $(a'_1a'_2 \dots a'_n)$ 的關係式。
- (4) 【20%】在字典序中， $(a_1a_2 \dots a_n)$ 比 $(a'_1a'_2 \dots a'_n)$ 小的意思是指存在 $r, 1 \leq r \leq n$ ，使得當 $i < r$ 時 $a_i = a'_i$ 、但是 $a_r < a'_r$ 。將 T_n 的所有頂點以字典序、由小到大排列，有兩個名稱的頂點以字典序比較小的名稱來排列為準。則任給一 $(a_1a_2 \dots a_n)$ 在此序列中是第幾項？

二、

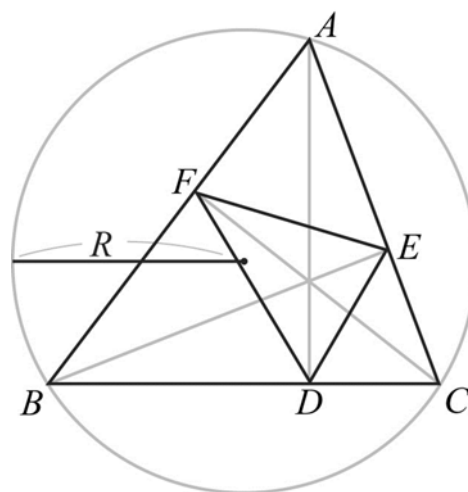
- (1) 【40%】 給定銳角三角形 $\triangle ABC$ ，並令 D 、 E 、 F 依序為 A 、 B 、 C 在 \overline{BC} 、 \overline{CA} 、 \overline{AB} 上

的垂足，若令 $L = \overline{DE} + \overline{EF} + \overline{FD}$ ；

R 為 $\triangle ABC$ 的外接圓半徑； Δ 為 $\triangle ABC$ 的面積。請證明

$$\Delta = \frac{1}{2} \cdot L \cdot R$$

- (2) 【10%】 如果 $\triangle ABC$ 是鈍角三角形，這個公式還是對的嗎？給出一個可行的修正建議。



給分說明：

1. 若你會直接證明，請寫出你的證明，分數依證明的正確性與完整性給分。
2. 若不會證明，則請給你嘗試的思路與策略（例如先從特例如正三角形下手，歸納證明的手法，再嘗試一般的證明），評分將依照你的嘗試深度來給分。