

國立臺灣大學
102 學年度高中科學班資格測驗試題本
數學

—作答注意事項—

考試時間：共 60 分鐘（請自行斟酌分配時間）

作答方式：務必作答於「各科答案卷上」，請以黑色或藍色原子筆、鋼珠筆或中性筆作答，
並標明題號。

注意事項：本考科可使用會場提供之電子計算機輔助運算作答。

祝考試順利

第壹題：(佔分50)

說明：以下有一段敘述，包含了兩小題的題目，請根據題目敘述作答，並詳述答題理由。答案務必寫在答案卷上，否則將予扣分。題目前標示之百分比（如：【20%】）為配分。

設 $\vec{a}, \vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3, \vec{u}_4, \vec{u}_5$ 為三維空間的六個單位向量。而且滿足關係

$$\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_3 = 0, \quad \vec{u}_2 \cdot \vec{u}_4 = 0, \quad \vec{u}_3 \cdot \vec{u}_5 = 0, \quad \vec{u}_4 \cdot \vec{u}_1 = 0, \quad \vec{u}_5 \cdot \vec{u}_2 = 0$$

其中 $\vec{u} \cdot \vec{v}$ 表示兩向量之內積。現定義一量 S 為

$$S = \min_{\vec{a}} \max_{1 \leq i \leq 5} \frac{1}{(\vec{a} \cdot \vec{u}_i)^2}$$

(已知此量 S 存在)。

(1) 【20%】利用 $36^\circ - 72^\circ - 72^\circ$ 三角形的三邊關係，求 $\cos \frac{4\pi}{5}$ 的值。

(2) 【30%】證明 $S \leq \sqrt{5}$ 。

[提示：考慮一把有五根傘骨的傘，傘柄尖端位於原點，另一端為 $(0,0,1)$ 。假設傘收起來時，五根傘骨和傘柄一樣，兩端各位於原點與 $(0,0,1)$ 。現固定原點之傘尖，將傘逐漸打開，五個傘骨端點將位於一平行於 $x-y$ 平面的平面上，且構成一正五邊形。控制張開的程度將可協助解題。]

第貳題：(佔分50)

說明：以下有一段敘述，包含兩小題的題目，請根據題目敘述作答，並詳述答題理由。答案務必寫在答案卷上，否則將予扣分；並於題號欄標明題號 (1), (2)，題號後標示之百分比（如：**【20%】**）為配分。

先回答第一個問題，再以其想法解決第二個問題。

(1) **【20%】** 設二次多項式 $f_0(x), f_1(x), f_2(x)$ 滿足下列關係：

$$f_0(0) = 1, f_0(1) = 0, f_0(2) = 0$$

$$f_1(0) = 0, f_1(1) = 1, f_1(2) = 0$$

$$f_2(0) = 0, f_2(1) = 0, f_2(2) = 1$$

用 $f_0(x), f_1(x), f_2(x)$ 表示滿足 $f(0) = a, f(1) = b, f(2) = c$ 的插值多項式 $f(x)$

(2) **【30%】** 有一個整數 n 被 2 除餘 r_2 、被 3 除餘 r_3 、被 5 除餘 r_5 ，請找出一個明確的算法，求出所有滿足此條件的整數，並完整證明你的想法。