

後 語

偉哉！人類文明。蕩蕩呼！近代數學。妙哉！高等微積分！

由兩個不能問的事物---0 與 1，而有整數系及四則運算；由整數系而有有理數系；由有理數系而有實數系的建構；實數系具完備性而有連續函數諸性質，由此而有微積分基本定理，開啟了近代科學文明，改變了人類生活方式。何其有幸，能活在這個時代，何其有幸，能修這門課，在短短的一年內，能了解文明誕生的艱辛，能吸收消化前人數百年的智慧結晶，能看到許多睿智之士，一展長才，提出新觀念、新思維，為人類文明綻放異彩。

子曰：不學詩，無與言。

套用 孔子這句話：不學高等微積分，無與談數學。恭喜你修畢了這門課，恭喜你打造出一支龍泉寶劍，從此，可以進出江湖，不用害怕。那習題是煉劍的火爐，溫度不低，你要有耐心，好好的做，才能煉出一把好劍，興之所至，還可以舞上一段三才劍法：且看飛虹橫江，擎起玉柱；再看玉女送書，天邊掛月；回頭又來個龍躍天門，丹鳳朝陽。好不快哉！幾年前，物理系蔡李承同學，問我一個問題：

Can a set of Lebesgue measure zero be represented as the countable union of Jordan content zero sets ?

我直覺地認為不對，但一時也想不出反例來，建議他往 Cantor type set 尋覓，三個禮拜後，他寫了兩頁文稿給我，裡面是他自己造的一個反例。學了一年高等微積分而能問這樣的問題，能沉潛深思，挑戰困難，終於悟得三昧，造出反例。論述精妙，劍法高超，實在叫人讚嘆！我在台大經常會看到這樣的學生，這塊土地上一定會出世界一流的人才，我深信著。

這個講義和一般的數學課本很不一樣，我認為數學課本不應該只是定義定理的堆砌，學問思想是活的，每一個人寫書應該展現自己的風格，用心靈和學生對話，我希望傳遞我對數學的看法和品味；簡繪了數學發展的大脈，希望年青人知道為什麼要學這些東西，了解它的歷史背景和艱難處，並介紹那些可敬的拓荒者，希望對年青人有所啟示。其間並談及一些人生問題，雖非數學內涵，不過，我認為做為一個人，不去思索這些問題，糊塗一生，實在冤枉。人活在世，除了謀生的專業學問之外，生命要有所寄託，有價值的追尋，人應該要有這樣的情懷，生命才有內涵。這些話就當作我和你們的聊天，輕鬆地聽，認真地想，對你不會有害。

有些定理，我不厭其煩，介紹了不同的證明。同樣的問題，不同的觀點有不同的巧妙，各有千秋，值得品味學習，希望對同學有所啟發。第十二章形上觀微積分基本定理，則是一種數學哲學，用它來統觀相關定理，使你對數學有形而上的體認。但數學不是物理，物理可以有形上觀的原理，藉它來統籌物理諸律。數學不能這樣，統觀歸統觀，只是方便的法門，散度定理、Stokes 定理及 Gauss Bonet 定理等，各有各的證明，風馬牛不相及。誰能引進一種空間的度量和其上的微分、積分概念，把這些定理統一起來，他將青史留名。這樣的定理可以用一句話來形容---It is great !

請同學了解，It is difficult 並不等於 It is great，The Riemann conjecture is difficult，但我不知道它是否 great？能夠稱得上 great 的定理非常稀少，它是一種大開大闢的提煉；是一種人跟上帝之間的對話；是一種為生民立命，為天地立心的壯舉。說不定你們當中會出這樣的人才，寫下這 great 定理呢！

這門課能在網路上和大家見面，要感謝台大科學教育中心的籌劃，其中林怡文小姐的督導，物研所辛柏伸助教 (Chapter 1---8，赴美深造) 數研所李奇濤助教 (Chapter 9---15) 的打字、編圖，以及那幾位不知名的工作人員，謝謝他們的用心。

我也想對修這門課感到障礙的同學說幾句話，這門課每年總有那麼多同學不及格，一修、再修、甚至又修，這背後有多少喪氣的青年和心酸的父母？

年青人，不要喪氣。我在美國遇見一位中年婦人，兒女都已上大學了，她又回到大學修普通物理，她說：這門課是我的痛，一直讀不好，見到它就怕，我想好好地面對自己。她每一節課都提前五分鐘到教室，坐在第一排的正中央，聚精會神地上課，回家後馬上把今天上課的內容吸收消化，有所疑問，一定請教老師，老師交代的習題一定努力完成，遇到困難，一定請問助教，慢慢地，他讀出了味道，第一次期中考，出她意料，竟然是全班最高分。啊！這怎麼能？我居然可以把物理讀得這麼好！真是太棒了！從此她拾回信心，不但不再怕物理，而且喜歡物理。學期結束，老師特別在班上讚美她，她改變了自己的人生。

啊，同學！一個人肯下這樣的決心，沒有修不過高微的道理，不但高微難不倒你，人生的關關卡卡，也難不倒你，曾經滄海者難為水，正是這個道理。天下最讓父母開心的事，莫過於子女的成才。抬頭前進吧，年青人！

既使再好的學生，也有令人嘆息的境遇。幽蘭雖香，難歷風雨，信鴿善飛，羽斷關山。想來，要成就一個人，是多麼的不容易！啊，同學！鑽石不經琢磨，

不會發亮。境遇，是老天給人的功課，如何從逆境中成長，卻是人生可詩可歌的故事。幾年前，數學系學生的畢業典禮，要我說幾句話，我唱了一首歌，祝福他們。那歌的歌詞如下：

大江蜿蜒曲折 歷經重山阻隔

瀑下千仞崗 浪捲萬里崖

漁唱夕陽紅 稻舞平野青

漁唱夕陽紅 稻舞平野青

高山靜默無語 任憑雪封雨淋

寒風出勁柏 絕壁有孤松

花開溪澗香 獸潛山林深

花開溪澗香 獸潛山林深

大江有自強不息的精神，高山有厚德載物的美德，一乾一坤，涵養萬物，有德君子，其敬法之。

願我們的國運昌隆，願天下有才華的年青人能懷有抱負，得其所安，站上舞台，高歌一曲，綻放光芒，寫下歷史新頁。