102 學年度台灣大學數學系高等微積分下由陳金次教授製作，以創用 CC 姓名標示-非商業性-禁止改作 3.0 台灣 授權條款釋出

Chapter 12

形上觀微積分基本定理

12.1 引言

邏輯的推演與論証固然是數學的核心部分，但定理的提出則在邏輯推演之前，你怎麼知道要提它，並試著想証明它？那是基於你內在心靈的判斷，這件事應該是對的，我試著來証証看。証出來就是定理，証不出來就成 conjecture，留待後人來回答。

一個人能提出 conjecture，絕非泛泛之輩。它對相關內容一定有極深入的了解，因了解而有形而上的感覺，因有此感覺，故能直入問題的核心、思考、提問。

不只數學如此，世間任何學問無不如此，即使是人文歷史，也是如此。對歷史有深入了解的人，能在大方向上預測歷史。

這一章裡，我將把微積分基本定理提到形而上的層次，用它來統觀相關定理。

首先，由物理中直線上的質點運動來看，設 $S(t)$ 表質點在 $[0,t]$ 區間內的里程，則

$$\frac{dS(t)}{dt} = v(t)$$

表質點在 t 時刻的瞬時速度。

$v(t)$ 在 $[0,t]$ 區間內的積分：

$$\int_0^t v(\tau)d\tau$$

要還原成 $[0,t]$ 上的里程，簡單記作：

$$\frac{dS}{dt} = v \Rightarrow \int v\ dt = S$$

又如 Ω 表空間中一物體，$P \in \Omega$，在 P 點附近任取一適當領域 V 包含 P。設 $M(V)$ 表 V 的質量，則

$$\lim_{V \to P} \frac{M(V)}{V} = \rho(P) \quad (V\text{表體積})$$

表 P 點的密度。

反之，若 ρ 給定，則又有

$$\int_V \rho \, dV = M(V)$$

換言之，質量對體積微分得到密度；密度對體積積分要還原成質量，簡記作：

$$\frac{dM}{dV} = \rho \Rightarrow \int \rho \, dV = M$$

抽象化：

石頭對時間微分＝泥沙，則泥沙對時間積分要還原成石頭，簡記作：

$$\frac{d(\text{石})}{dt} = \text{泥沙} \Rightarrow \int \text{泥沙} \, dt = \text{石}$$

抽象之：

$$\frac{dQ}{dP} = R \Rightarrow \int R \, dP = Q$$

12.2 曲線曲率

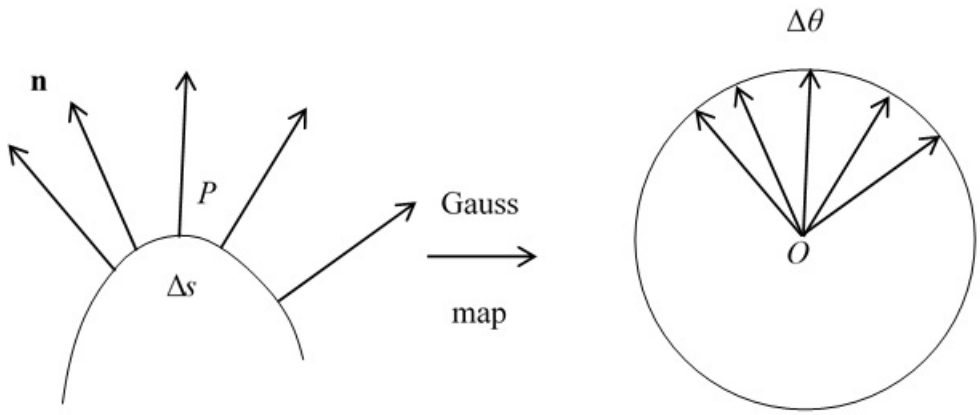
你走北宜公路，要下宜蘭平原之前有著名的九彎十八拐，道路彎曲得很厲害。
什麼叫彎曲得很厲害？你在台北仁愛路上開車，不覺得彎曲，因你走了半天，方向幾乎不變。
你在九彎十八拐開車，短短的距離內，方向改變很大，這代表它彎曲得厲害。

速度是單位時間內的位移，
曲率是單位弧長上切向角度的變量。

注意：切向角度的變量即法向角度的變量。

數學上的定義：

設 Γ 爲平面上一平滑曲線，$P \in \Gamma$，在 Γ 附近任取一小弧 $\Delta S, Q \in \Delta S$，令 $\mathbf{n}(Q)$ 表 Γ 在 Q 點的單位法向量，將 $\mathbf{Q}$ 平移至單位圓心：



如圖，諸 $\mathbf{n}(Q)$ 在單位圓周上，掃出的弧長即法向量在 Δs 上法向角度的變量。

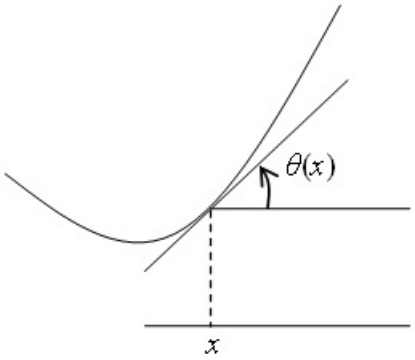
定義：$\kappa(P) = \lim\limits_{\Delta S \to 0} \dfrac{\Delta\theta}{\Delta s}$ (此處 Δs 代表 Δs 的弧長)

亦即：$\kappa = \dfrac{d\theta}{ds}$

亦即：曲率＝法 (切) 向角對弧長微分。

(a) 函數型曲線

設 $\Gamma = \{(x, f(x))|a \leq x \leq b, f \in C^1[a,b]\}$，爲便於計算，考慮切向角的變率。令 $\theta(x) =$ 曲線 Γ 在 x 點的切線與 x 軸正向間的夾角。



則 $\theta = \tan^{-1} f'(x)$,

$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{f''(x)}{1 + (f'(x))^2}$$

又 $s(x) = \int_a^x \sqrt{1 + (f'(x))^2}dt$，$\therefore \frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + (f'(x))^2}$，故

$$\kappa(x) = \frac{d\theta}{ds} = \frac{\frac{d\theta}{dx}}{\frac{ds}{dx}} = \frac{f''(x)}{[(1 + (f'(x))^2]^{3/2}}$$

(b) 參數型

設 $\Gamma = \{(x(t), y(t)|a \leq t \leq b\}$ 表平面上一參數曲線，則 (x', y') 表 Γ 於 $(x(t), y(t))$ 點的切向量。$\theta = \tan^{-1} \frac{y'}{x'}$ 表切向量與 x 軸正向所夾之角，$s(t) = \int_a^t \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}dt$，

則 $\frac{d\theta}{dt} = \frac{y''x' - x''y'}{x'^2 + y'^2}$，$\frac{ds}{dt} = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}$，故

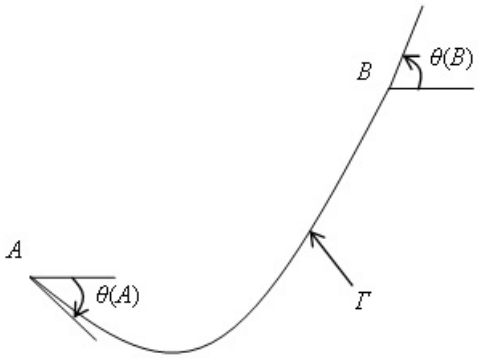
$$\kappa = \frac{d\theta}{ds} = \frac{\frac{d\theta}{dt}}{\frac{ds}{dt}} = \frac{x'y'' - y'x''}{(x'^2 + y'^2)^{3/2}}$$

(c) 形上觀

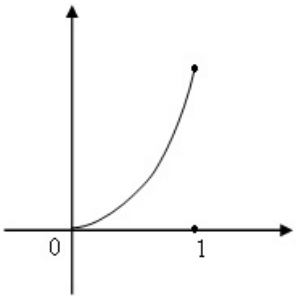
曲率既是切 (法) 向角對弧元微分，那曲率對弧元積分應還原成切 (法) 向量的變量。

定理 **12-1**

$$\frac{d\theta}{ds} = \kappa \Rightarrow \int_\Gamma \kappa ds = \text{切(法)向角在 } \Gamma \text{ 上的變量} = \theta(B) - \theta(A) \tag{1}$$



例 **1.** $\Gamma = \{(x,y)|y = x^2, 0 \le x \le 1\}$，求 $\int_\Gamma \kappa ds$



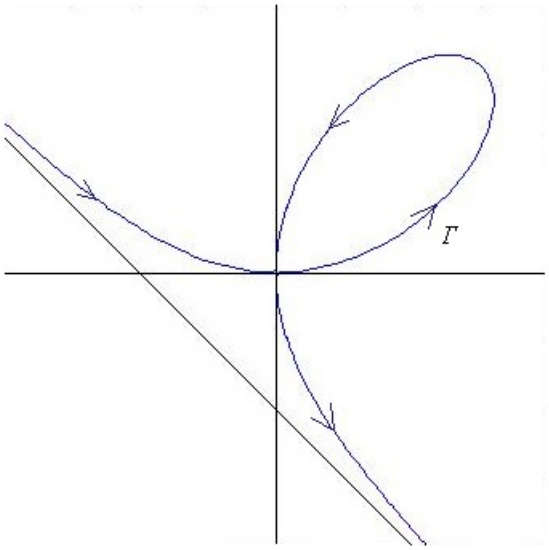
解：$y' = 2x, y'(0) = 0, y'(1) = 2 \ \therefore \theta(0) = 0, \theta(1) = \tan^{-1} 2$，$\theta$ 表切向量與 x 軸正向間的夾角。

依形上觀微積分基本定理，

$$\int_\Gamma \kappa ds = \theta(1) - \theta(0) = \tan^{-1} 2$$

例 **2.** $\Gamma = \{(x,y)|x^3+y^3-3xy, x \geq 0, y \geq 0\}$
表 Descartes 葉形線於第一象限上的部分，求 $\int_\Gamma \kappa ds$

解：Descartes 葉形線如圖



當 x 由 $-\infty \to \infty$，Γ 第一次過 0 點，切向爲 $(1,0)$；第二次過 0 點，切向爲 $(0,-1)$，故切向在 Γ 上的增量爲 $\frac{3\pi}{2}$，$\therefore \int_\Gamma \kappa ds = \frac{3\pi}{2}$ (積分方向如箭頭所示)

公式 (1) 的証明：

設 $\Gamma : (x(t), y(t)), a \leq t \leq b$，$\theta(t)$ 表 Γ 在 $(x(t), y(t))$ 的切向與 x 軸正向所夾角，則

$$\int_\Gamma \kappa ds = \int_\Gamma \frac{d\theta}{ds} \cdot ds = \int_\Gamma d\theta = \int_a^b \theta'(t)dt = \theta(b) - \theta(a).$$

12.3 曲面曲率

給定空間中一曲面 S，$P \in S$，如何描述 S 在 P 點的曲率呢？

(a) 高斯曲率

高斯把平面上曲線曲率的概念推廣到曲面上：

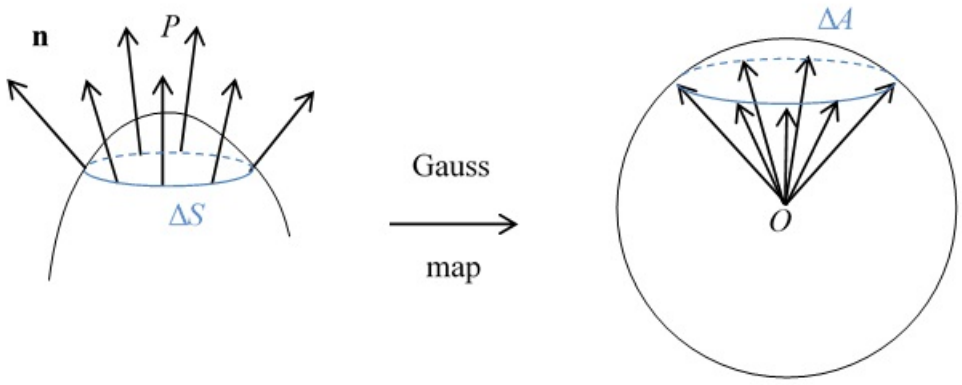
Gauss map

在 P 點附近任取一適當領域 ΔS, $\forall\, Q \in \Delta S$，令 $\mathbf{n}(Q)$ 表曲面 S 在 Q 點朝上的單位法向量。將 $\mathbf{n}(Q)$ 平移至單位球的球心，諸法向量在單位球面上掃描出一領域 ΔA，ΔA 的面積，仍以 ΔA 表示之，表諸法向量所張之立體角。

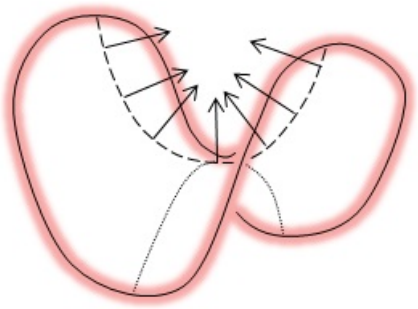
定義：$K(P) = \lim\limits_{\Delta S \to P} \dfrac{\Delta A}{\Delta S}$，$\Delta S, \Delta A$ 此時表 ΔS 與 ΔA 的面積。

上述把 $\mathbf{n}(Q)$ 平移至單位球球心的寫像稱爲 Gauss map.

換言之，所謂曲面的高斯曲率乃法向量所張立體角對面元微分：$K = \dfrac{dA}{dS}$，dS 表曲面 S 上的面元。



Remark: 高斯曲率觀念上如上所述，但當曲面爲馬鞍狀時，它的 Gauss map 顯然和凸曲面有所差別，方向上有所對調，



這時它在單位球面上所張面積，我們就冠以負號以示區別。因此，這種曲面的高斯曲率爲負的。

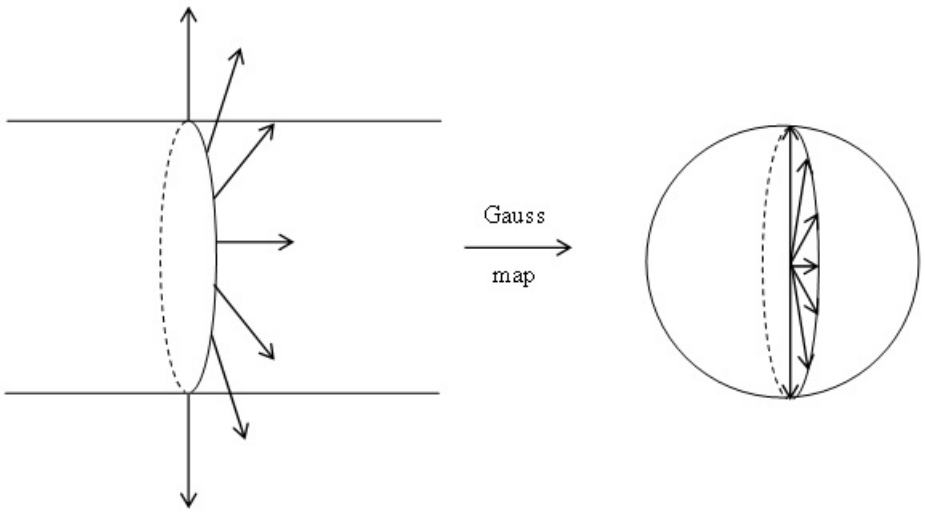
現在我們來觀察一件事情：

平面上的法向量只有一個方向，因此 $\Delta A = 0$，故 $K(P) = 0$

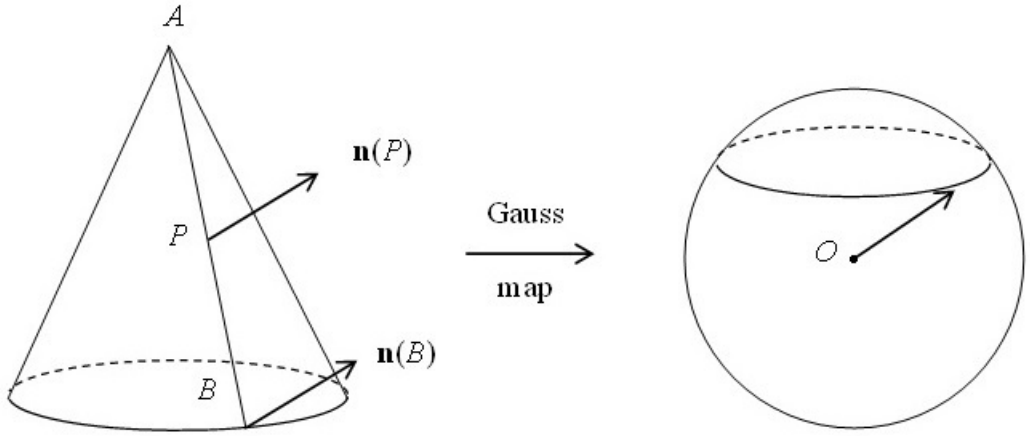
把平面捲起成圓柱狀，其法向量經 Gauss map 後在單位球面上爲一圓弧，故 $\Delta A = 0$

$\therefore K(P) = 0 \ \forall \ P$

怪哉！圓柱的高斯曲率爲 0！



再來看看圓錐 S



如圖，$P \in \overline{AB}$，則 $\mathbf{n}(P) = \mathbf{n}(B)\ \forall\ P$，因此 S 的法向量經 Gauss map 後爲一圓弧，故 $\Delta A = 0\ \forall\ \Delta S$

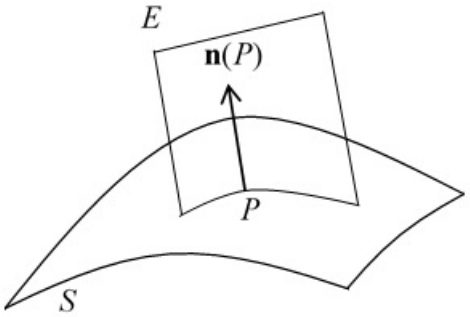
$\therefore K(P) = 0\ \forall\ P \in S$

怪哉！圓錐的高斯曲率也是 0！太離譜了吧！

這是高斯曲率不足之處，但並不是說它不好，它需要另一個曲率來和它作伴，這個曲率數學上稱爲均曲率 H，有了 K 和 H，曲面 S 的彎曲就可以清晰地描述了。

(b) 均曲率 (Mean curvature)

設 S 爲 $\mathbb{R}^3$ 中平滑曲面，$P \in S$，設 $\mathbf{n}(P)$ 爲 S 在 P 點法向量，E 爲過 P 點平面，$\mathbf{n}(P) \in E$，則 $\Gamma = S \cap E$ 爲 E 上一平滑曲線，Γ 在 P 點的曲率 $\kappa(P)$ 可定義。



想像 $\mathbf{n}(P)$ 爲軸，E 爲以 $\mathbf{n}(P)$ 爲轉軸的一扇門，門開到哪裡，那裏就有 Γ，因此就有 $\kappa(P)$

令 $\kappa_1(P) = \max\limits_{E} \kappa(P) = \max\limits_{0 \le \theta \le \pi} \kappa(\theta)$，$\kappa_2(P) = \min\limits_{E} \kappa(P) = \min\limits_{0 \le \theta \le \pi} \kappa(\theta)$，

$E = E(\theta), 0 \le \theta \le \pi$，$\theta$ 表門與" 牆" 間所開角度，這個牆可以是某一含 $\mathbf{n}(P)$ 的平面 E，

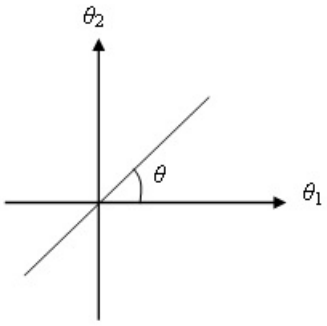
定義：$H(P) = \dfrac{\kappa_1(P) + \kappa_2(P)}{2}$，稱爲曲面 S 在 P 點的均曲率。

以下我引述微分幾何的一些定理：

1. $K(p) = \kappa_1(P) \cdot \kappa_2(P)$
2. κ_1, κ_2 的方向垂直，即 κ_i 若由 $E(\theta_i)$ 所定，$i = 1, 2$，則 $|\theta_1 - \theta_2| = \dfrac{\pi}{2}$

3. 設 $\theta_1 = 0, \theta_2 = \dfrac{\pi}{2}$，則由 E_θ 所定之曲線 Γ_θ，其於 P 點的曲率爲 $\kappa(\theta)$，則

$$\kappa(\theta) = \kappa_1 \cos^2\theta + \kappa_2 \sin^2\theta \ - \ \text{Euler formula}$$



4. $H(P) = \kappa_1(\theta) + \kappa_2(\theta + \frac{\pi}{2})$
5. 若曲面 S 由函數 $z = f(x,y), (x,y) \in \Omega$ 所描述，$P(x,y,f(x,y)) \in S$，則

$$K(P) = K(x,y) = \frac{f_{xx} \cdot f_{yy} - {f_{xy}}^2}{(1 + f_x^2 + f_y^2)^2}$$

$$H(P) = H(x,y) = \frac{1}{2} \cdot \frac{(1 + f_y^2) f_{xx} - 2 f_x \cdot f_y \cdot f_{xy} + (1 + f_x^2) f_{yy}}{(1 + f_x^2 + f_y^2)^{3/2}}$$

這些定理，在微分幾何裡都會學到，在此介紹給同學認識。

現在回過頭來看 K, H 及 Euler formula

K, H 已知，則 κ_1, κ_2 可求；κ_1, κ_2 既知，則 $\kappa(\theta)$ 可由 Euler formula 求出。

換言之，K, H 決定了曲面任何方向的曲率，K, H 已知，則曲面彎曲的內容清晰在目。

Gauss 曲率和均曲率是研究曲面性質的兩大要素。

Gauss 曲率和曲面的幾何性質息息相關，
均曲率則和物理性質息息相關。

例如，把一封閉的鐵絲線圈放入肥皂水中，取出，線圈內會掛著一張曲面 S，這個 S 數學上稱爲最小曲面，其均曲率處處爲 0。

把吸管一端放入肥皂水中，取出，在任意曲面上吹一氣泡 S，則 S 爲一常均曲率曲面 (constant mean curvature surface) 且垂直於給定曲面。

我們都聽過阿基米德的故事，當他發現浮力原理時，高興得從浴缸裡跳出來，在街上狂奔，大呼 Eurika！Eurika！Eurika！

高斯也有類似的經驗，不過他比較保守，得意之餘把他的發現稱作 Theorema Egregium，意思是 Theorem of the King，並沒有在街上大喊 Eurika！

所謂 Theorema Egregium 是指：在保距變換下，高斯曲率不變。

例如平面的高斯曲率是 0，把它捲成圓柱或圓錐，並沒有改變其上的內蘊賦距，故高斯曲率都是 0。

均曲率則隨你擺放的形狀而變。平面的均曲率爲 0，捲成圓柱或錐面，其均曲率改變了。

我們可以這樣子來了解：

> Gauss 曲率是曲面內蘊的性質，不隨你擺放的形狀而變。
> 均曲率是外爍曲率，隨你擺放的形狀而異。

打一個比方，變色龍 Akola 走到哪裡都是 Akola，不論外在環境如何，他的身體如何擺放，不過它的顏色卻隨外在環境而調整改變，那不變的就是 Gauss 曲率，那調整的就是均曲率。

當一 compact smooth surface S，高斯曲率恆常，問 S 是否爲球面？這是十九世界末數學上的一個重要問題，1899 年 H.Liebmann 証明它是對的。

Gauss Theorema Egregium 和 Liebmann 的定理說明了球是剛性的，即：你把球變形，都會改變其上的賦距。

相對於 Liebmann 的定理，人們自然會問：

當一個 compact smooth surface 均曲率恆常，問：S 是否爲一球面？這就是數學上有名的 Hopf conjecture.

Hopf 於 1952 年証明定理成立，若 S 和球同構。

Alexandrov 於 1956 年証明定理成立，若 S 不自相交 (附錄 B)，對一般的曲面 S，定理不成立，H.Wente 於 1985 年給出了反例。

以上當作故事，聽聽就好。

(c) 形上觀

<u>定理 **12-2**</u>

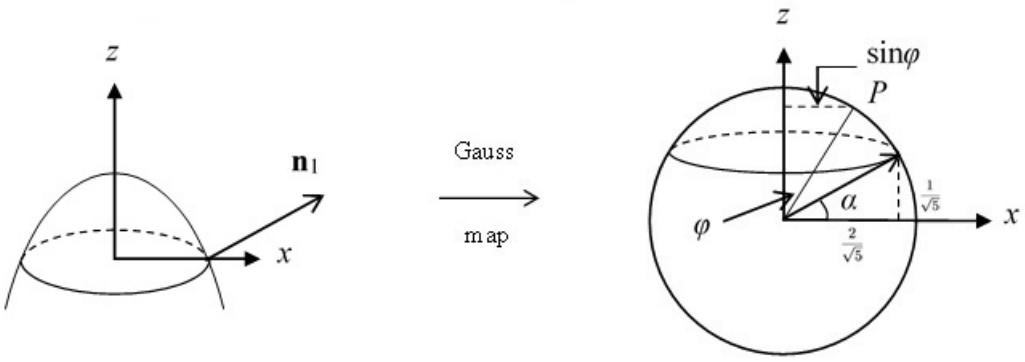
由 $\dfrac{dA}{dS} = K \Rightarrow \displaystyle\int_S KdS = A(S) = S$ 上法向量在單位球面上所張立體角。

例. 拋物線 $z = 1 - x^2, -1 \le x \le 1$，對 z 軸旋轉一圈，得旋轉面 S，令 K 表其上的高斯曲率，求 $\displaystyle\int_S KdS$

分析：

1. 根據形上觀微積分基本定理，

   $\displaystyle\int_S KdS = A(S) = S$ 上諸法向量經 Gauss map 後在單位球面上所張面積 (立體角)



2. $z'(x) = -2x, z'(1) = 2, \mathbf{n}_1 = \mathbf{n}(1,0,0) = (2,0,1)/\sqrt{5}$，經 Gauss map 後諸法向量所張立體角爲上半單位球面在 $z \ge \dfrac{1}{\sqrt{5}}$ 上的面積。

3. 設 $P \in A(S)$，ϕ 表 $\overline{OP}$ 與 z 軸間的夾角，則

$$\begin{aligned} A(S)(\text{面積}) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}-\alpha} 2\pi \sin\phi \cdot d\phi \\ &= 2\pi \ (1-\cos\phi)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}-\alpha} \\ &= 2\pi(1-\sin\alpha) \\ &= 2\pi\left(1-\frac{1}{\sqrt{5}}\right) \end{aligned}$$

故 $\displaystyle\int_S KdS = 2\pi\left(1-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$.

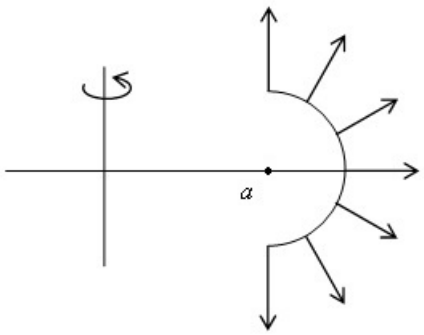
驗證；$z = 1-(x^2+y^2), z_x = -2x, z_y = -2y, z_{xx} = -2, z_{xy} = 0, z_{yy} = -2$

$K = \dfrac{z_{xx}\cdot z_{yy} - z_{xy}}{(1+z_x^2+z_y^2)^2} = \dfrac{4}{[1+4(x^2+y^2)]^2}, dS = \sqrt{1+4(x^2+y^2)}dxdy$

令 $D = \{(x,y)|x^2+y^2 \le 1\}$，則

$$\begin{aligned}
\iint_S KdS &= 4\iint_D \frac{dxdy}{[1+4(x^2+y^2)]^{3/2}} \\
&= 8\pi\int_0^1 \frac{1}{(1+4r^2)^{3/2}} rdr \\
&= \pi\int_0^1 \frac{1}{(1+4r^2)^{3/2}} d(1+4r^2) \\
&= \pi\left[-2(1+4r^2)^{-\frac{1}{2}}\right]\Big|_0^1 \\
&= 2\pi\left(1-\sqrt{5}\right)
\end{aligned}$$

例. $\Gamma : (x-a)^2+y^2 = b^2, x \ge a, a > b$，$\Gamma$ 對 y 軸旋轉得輪胎外側 S^+，求 $\displaystyle\int_{S^+} KdS$.



解：Γ 上的法向量沿經線自北極至南極，旋轉一圈後佈滿至整個球面，故

$$\int_{S^+} KdS = 4\pi$$

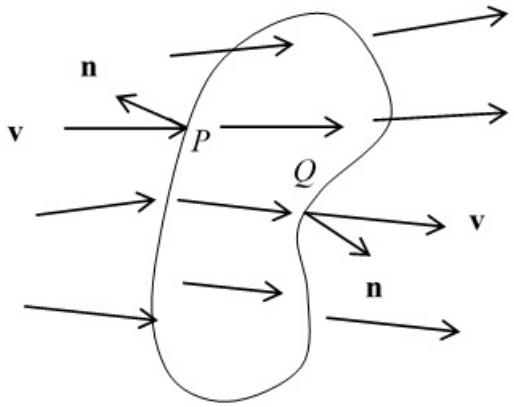
定理 12-2 的証明就留待給微分幾何的老師吧。

12.4 淨流量與散度定理

A. $\mathbb{R}^2$ 中的散度定理

a. 淨流量

設 $\mathbf{V}$ 爲 $\mathbb{R}^2$ 中一向量場，Ω 爲 $\mathbb{R}^2$ 中片段平滑封閉領域。$\mathbf{n}$ 爲 $\partial\Omega$ 上朝外單位法向量，



定義：

$$\int_{\partial\Omega} \mathbf{V}\cdot\mathbf{n}ds$$

爲 $\mathbf{v}$ 在 Ω 上的淨流量，其中 ds 表 $\partial\Omega$ 上的弧元。

b. 散度

設 P 爲 $\mathbf{V}$ 之定義域中的給定點，在 P 點附近任取一適當領域 D，考慮：

$$\frac{1}{|D|}\int_D \mathbf{V}\cdot\mathbf{n}ds$$

其中 $|D|$ 表 D 的面積。此式表示 $\mathbf{V}$ 在 D 上的平均淨流量。

若 $\lim\limits_{D\to P}\dfrac{1}{|D|}\displaystyle\int_D \mathbf{V}\cdot\mathbf{n}ds$ 存在，我們稱此極限爲 $\mathbf{V}$ 在 P 點的散度 (Divergence)，

以 $\mathrm{div}\mathbf{V}(P)$ 表示之。

$$\mathrm{div}\mathbf{V}(P)=\lim_{D\to P}\frac{1}{|D|}\int_D \mathbf{V}\cdot\mathbf{n}ds \tag{2}$$

其意爲單位面積上的淨流量。

對 (2) 式，我們可以這樣理解：

散度是淨流量對面積微分

c. 形上觀－散度定理

散度既是淨流量對面積微分：

$$\frac{d(\text{淨})}{d(\text{面})} = \text{散}$$

依形上觀微積分基本定理：

$$\text{散度對面積積分要還原成淨流量：} \int_\Omega \text{散}\ d(\text{面}) = \text{淨}(\Omega)$$

更精確地說即：

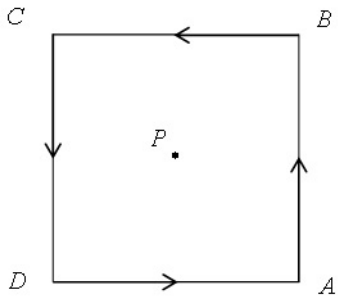
定理 **12-3** 二維的散度定理 (The Divergence Theorem in $\mathbb{R}^2$)

$$\int_\Omega \text{div}\mathbf{V}\ dxdy = \int_{\partial\Omega} \mathbf{V}\cdot\mathbf{n}\ ds \quad (\mathbf{V}\text{在}\Omega\text{上的淨流量}) \tag{3}$$

d. 對直角坐標系的表示式

給定直角坐標系，設 $\mathbf{V}$ 對此坐標系可表爲 $\mathbf{V} = (A(x,y), B(x,y))$，div$\mathbf{V}$ 如何表示？

設 $P = (x_0, y_0)$，在 P 點附近取 $G = [x_0-h, x_0+h]\times[y_0-h, y_0+h]$，$\partial G = \square ABCD$，如圖所示，



$$\begin{aligned}\int_{\partial G}\mathbf{V}\cdot\mathbf{n}ds &= \left(\int_A^B + \int_C^D \mathbf{V}\cdot\mathbf{n}ds\right) + \left(\int_B^C + \int_D^A \mathbf{V}\cdot\mathbf{n}ds\right)\\ &= I_1 + I_2\end{aligned}$$

注意：

於 $\overline{AB}$ 上，$\mathbf{n} = (1,0), ds = dy$
於 $\overline{CD}$ 上，$\mathbf{n} = (-1,0), ds = -dy$

於是有：

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{y_0-h}^{y_0+h} [A(x_0+h,y) - A(x_0-h,y)]dy \\ &= [A(x_0+h,\eta) - A(x_0-h,\eta)]\cdot 2h, \quad y_0-h<\eta<y_0+h \\ &= A_x(\xi,\eta)(2h)^2, \quad \xi = \xi(\eta)\in(x_0-h, x_0+h)\end{aligned}$$

$\therefore \lim_{G\to P} \frac{1}{|G|} \cdot I_1 = A_x(x_0, y_0)$

同理，$\lim_{G\to P} \frac{1}{|G|} \cdot I_2 = B_y(x_0, y_0)$，故

$$\text{div}\mathbf{V}(x_0, y_0) = A_x(x_0, y_0) + B_y(x_0, y_0) \tag{4}$$

又設 $\partial\Omega = (x(t), y(t))$，逆時向參數，$\mathbf{T} = (x', y')/\sqrt{x'^2 + y'^2}$ $ds = \sqrt{x'^2 + y'^2}$
$\Rightarrow \mathbf{T}ds = (x', y')dt = (dx, dy)$

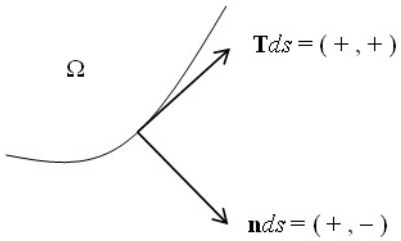
而 $\mathbf{n}ds \perp \mathbf{T}ds$

$\therefore$

$$\begin{aligned} \mathbf{n}ds &= (-dy, dx) \cdots \text{(i)} \\ &= (dy, -dx) \cdots \text{(ii)} \end{aligned}$$

取哪一個呢？

如果 $\mathbf{T}ds$ 落第一象限，$(dx, dy) = (+, +)$，$\mathbf{n}$ 爲 $\partial\Omega$ 上朝外法向量，$\mathbf{n}ds$ 應指向第四象限，$\mathbf{n}ds = (+, -)$，故應取 (ii)，即：$\mathbf{n}ds = (dy, -dx)$



$\therefore$

$$\int_{\partial\Omega} \mathbf{V} \cdot \mathbf{n}\ ds = \int_{\partial\Omega} -Adx + Bdy$$

代入 (2)，得 Divergence 定理對直角坐標系的表示式爲：

$$\int_{\Omega} (A_x + B_y)dxdy = \int_{\partial\Omega} -Adx + Bdy \tag{5}$$

回憶 Green's 定理：

$$\int_{\partial\Omega} Pdx + Qdy = \int_{\Omega} (Q_x - P_y)dxdy \tag{6}$$

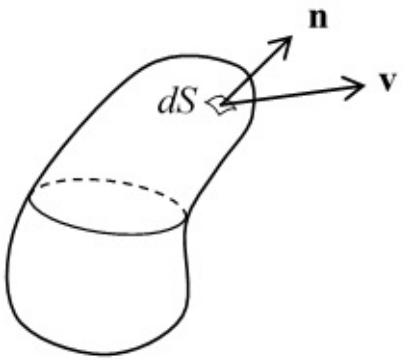
(5) $\Leftrightarrow$ (6)，取 $P = -A, Q = B$。

換言之，在 $\mathbb{R}^2$ 中，Divergence 定理和 Green's 定理是等價的。

B. $\mathbb{R}^3$ 中的散度定理

a. 淨流量

設 $\mathbf{V}$ 爲 $\mathbb{R}^3$ 中一向量場，Ω 爲 $\mathbb{R}^3$ 中片段平滑封閉領域，$\mathbf{n}$ 爲 $\partial\Omega$ 上朝外單位法向量，



定義：

$$\int_{\partial\Omega} \mathbf{V}\cdot\mathbf{n}\, dS$$

爲 $\mathbf{V}$ 在 Ω 上的淨流量。(dS 表 $\partial\Omega$ 上的曲面面元)

b. 散度

設 P 爲 $\mathbf{V}$ 之定義域中的給定點，在 P 點附近任取一適當領域 D，考慮：

$$\frac{1}{|D|}\int_D \mathbf{V}\cdot\mathbf{n}\, dS,\quad |D|表D的體積$$

此爲 $\mathbf{V}$ 在 D 上的平均淨流量，若

$$\lim_{D\to P}\frac{1}{|D|}\int_D \mathbf{V}\cdot\mathbf{n}\, dS$$

存在，我們稱此極限爲 $\mathbf{V}$ 在 P 點的散度 (Divergence)，以 $\mathrm{div}\mathbf{V}(P)$ 表示之，即

$$\mathrm{div}\mathbf{V}(P)=\lim_{D\to P}\frac{1}{|D|}\int_D \mathbf{V}\cdot\mathbf{n}\, dS \tag{7}$$

上式表示單位體積上的淨流量。

對 (7) 式，我們可以這樣理解：

散度是淨流量對體積微分

依形上觀微積分基本定理，

散度對體元在 Ω 上積分要還原成 Ω 上的總淨流量

即：

定理 **12-4** ($\mathbb{R}^3$ 中的散度定理)

$$\int_{\Omega} \text{div}\mathbf{V} d\mathbf{x} = \int_{\partial\Omega} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS \tag{8}$$

當然 (7) 式左右兩邊必須是可積分。爲確保此，我們假設：

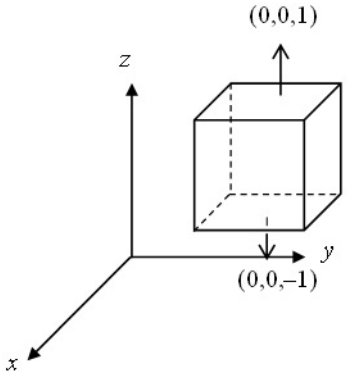
(i) $\mathbf{V} \in C^1(\Omega)$

(ii) $\partial\Omega$ 爲 Piecewise smooth

今給定直角坐標系，設 $\mathbf{V}$ 對此坐標系的表示爲 $\mathbf{V} = (A(x,y,z), B(x,y,z), C(x,y,z))$，$P(x_0, y_0, z_0)$ 爲定義域中給定點，

取 $D = [x_0 - h, x_0 + h] \times [y_0 - h, y_0 + h] \times [z_0 - h, z_0 + h]$，

$$\text{div}\mathbf{V}(x_0, y_0, z_0) = \lim_{h \to 0} \frac{1}{(2h)^3} \int_{\partial D} \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} \; dS = ?$$



看上下兩片正方形，上片：$\mathbf{n} = (0,0,1)$，下片：$\mathbf{n} = (0,0,-1)$，

$$\begin{aligned} \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} &= C(x,y,z_0+h) \text{ 在上片} \\ &= -C(x,y,z_0-h) \text{ 在下片} \end{aligned}$$

因此 $\mathbf{V} \cdot \mathbf{n} dS$ 在此上下兩片的積分爲

$$\begin{aligned} &\int_{D_{xy}} [C(x,y,z_0+h) - C(x,y,z_0-h)] dxdy \\ &(D_{xy} = [x_0 - h, x_0 + h] \times [y_0 - h, y_0 + h]) \\ &= [C(\xi,\eta,z_0+h) - C(\xi,\eta,z_0-h)] \cdot area(D_{xy}),\ \xi,\eta \in D_{xy} \\ &= C_z(\xi,\eta,\zeta)(2h)^3, \quad z_0 - h < \zeta < z_0 + h \end{aligned}$$

故

$$\lim_{h \to 0} \frac{\text{上下兩片淨流量}}{(2h)^3} = C_z(x_0, y_0, z_0)$$

同理，

$$\lim_{h\to 0}\frac{\text{前後兩片淨流量}}{(2h)^3}=A_x(x_0,y_0,z_0)$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{\text{左右兩片淨流量}}{(2h)^3}=B_y(x_0,y_0,z_0)$$

故

$$\mathrm{div}\mathbf{V}(x_0,y_0,z_0)=A_x(x_0,y_0,z_0)+B_y(x_0,y_0,z_0)+C_z(x_0,y_0,z_0)$$

設 $\mathbf{n}=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$ 表 $\partial\Omega$ 上朝外單位法向量，則 (8) 對直角坐標系的表示式可寫成

$$\int_\Omega A_x+B_y+C_z\ dxdydz=\int_{\partial\Omega}(A\cos\alpha+B\cos\beta+C\cos\gamma)dS \tag{9}$$

散度定理的証明：

我們以下証明 (9) 式成立，注意：

$$\begin{aligned} dS\cos\gamma &= dxdy\\ dS\cos\beta &= dzdx\\ dS\cos\alpha &= dydz \end{aligned}$$

(i) 設 Ω 不錯，$\partial\Omega$ 可以表成上下兩個函數 $z^+=f(x,y)$ 及 $z^-=g(x,y)$ 的形式，$(x,y)\in\Omega_{xy},\Omega$ 在 x,y 平面上的投影。

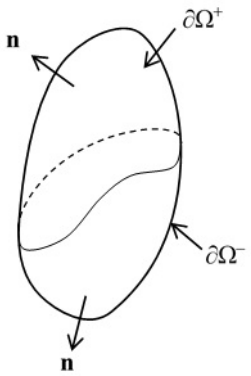
觀察 $\int_\Omega C_z dxdydz$ 這一項：

$$\begin{aligned} \int_\Omega C_z dxdydz &= \int_{\Omega_{xy}}\left(\int_{g(x,y)}^{f(x,y)}C_z dz\right)dxdy\\ &= \int_{\Omega_{xy}}C(x,y,f(x,y))-C(x,y,g(x,y))dxdy\\ &= \int_{\partial\Omega^+}C\cos\gamma dS-\int_{\partial\Omega^-}C\cos\gamma dS\ \ (\text{指}\partial\Omega^-\text{上朝上法向量的}\cos\gamma)\\ &= \int_{\partial\Omega}C\cos\gamma dS \end{aligned}$$

(吸收到 $\partial\Omega$ 後，$\partial\Omega$ 上朝外單位法向量在 $\partial\Omega^-$ 上爲朝下，故變號之)

其中

$$\begin{aligned} \partial\Omega^+ &= \{(x,y,f(x,y))|(x,y)\in\Omega_{xy}\}\\ \partial\Omega^- &= \{(x,y,g(x,y))|(x,y)\in\Omega_{xy}\} \end{aligned}$$



同理

$$\begin{aligned}\int_\Omega B_y dxdydz &= \int_{\partial\Omega} B\cos\beta dS \\ \int_\Omega A_x dxdydz &= \int_{\partial\Omega} A\cos\alpha dS\end{aligned}$$

若 $\partial\Omega$ 對 y 軸、對 x 軸都可表示成左右、前後兩個函數的形式。

(ii) 仿 Green's 定理的說明，當 $\partial\Omega$ 含平行於座標軸的平面時定理成立。

(iii) 對一般領域，再仿 Green's 定理的處理，可把 Ω，以平行座標軸的平面切割成 $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \cdots \cup \Omega_N$，每個 Ω_i 滿足 (i) 所要求，定理在 Ω_i 成立 $\forall\, i \Rightarrow$ 定理對 Ω 成立。

例 **1.** S 表單位球面，求 $I = \int_S x^4 dS$ 之值。

分析：

1. 你可以採球面座標 $x = \sin\phi\cos\theta, dS = 1^2\sin\phi d\theta d\phi$，
   $\Rightarrow I = \int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{\phi=0}^{\pi} \cos^4\theta \cdot \sin^5\theta d\phi d\theta = \left(\int_0^{2\pi}\cos^4\theta d\theta\right)\left(\int_0^{\pi}\sin^5\phi d\phi\right) = \cdots$
2. 不過 S 是單位球面，$\mathbf{n} = (x,y,z), (x,y,z) \in S$，球無方向性，故

$$\int_S x^4 dS = \int_S y^4 dS = \int_S z^4 dS$$

$\therefore$

$$\begin{aligned}I &= \frac{1}{3}\int_S (x^4+y^4+z^4)dS \\ &= \frac{1}{3}\int_S \mathbf{V}\cdot\mathbf{n}dS, \quad \mathbf{V} = (x^3,y^3,z^3) \\ &= \frac{1}{3}\int_\Omega \mathrm{div}\mathbf{V}\ dx\ dy\ dz,\ \Omega: \text{單位球體} \\ &= \int_\Omega r^4\sin\phi\ dr\ d\theta\ d\phi \\ &= \frac{4}{5}\pi\end{aligned}$$

例 **2.** 調和函數的球均定理

設 u 在 $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ 上調和 (Harmonic)，即

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = 0 \text{ 在}\Omega\text{上}, \ u \in C^2(\Omega)$$

$\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0, z_0) \in \Omega$, S_r 爲以 $\mathbf{x}_0$ 爲心，半徑 r 的球面，則 u 在 S_r 上的平均值恆等於 u 在球心的值 $u(\mathbf{x}_0)$， $\forall\ \mathbf{x}_0 \in \Omega$

即：

$$\begin{aligned} u(x_0, y_0, z_0) &= \frac{1}{|S_r|} \int_{S_r} u \ dS_r \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{\phi=0}^{\pi} u(x_0 + r\sin\phi\cos\theta, y_0 + r\sin\phi\sin\theta, z_0 + r\cos\phi) \sin\phi \ d\phi \ d\theta \end{aligned}$$

分析：

1. 令 $I(r) = \dfrac{1}{4\pi} \displaystyle\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} u(\cdots) \sin\phi d\phi d\theta$
   欲証：$I(r) = u(x_0, y_0, z_0)\ \forall\ r$
   先証：$I(r)$ =constant, 再証此 constant 爲 $u(x_0, y_0, z_0)$

2. $\dfrac{d}{dr} I(r) = \dfrac{1}{4\pi} \displaystyle\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \frac{\partial}{\partial r} u(\cdots) \sin\phi \ d\phi \ d\theta$
   (不妨大膽地把微分號搬進去)
   $= \dfrac{1}{4\pi} \displaystyle\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} (u_x \cdot x_r + u_y \cdot y_r + u_z \cdot z_r) \sin\phi \ d\phi \ d\theta$
   $= \dfrac{1}{4\pi} \displaystyle\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} (u_x \cdot \sin\phi\cos\theta + u_y \cdot \sin\phi\sin\theta + u_z \cos\phi) \sin\phi \ d\phi \ d\theta$
   $= \dfrac{1}{4\pi r^2} \displaystyle\int_{S_r} \nabla u \cdot \mathbf{n} dS_r$
   ($dS_r = r^2 \sin\phi \ d\phi \ d\theta, \mathbf{n} = (\sin\phi\cos\theta, \sin\phi\sin\theta, \cos\phi)$ 爲 S_r 上朝外單位法向量)
   $= \dfrac{1}{4\pi r^2} \displaystyle\int_{B_r} \text{div}\nabla u \ d\mathbf{x}$
   (B_r 表半徑 r，心在 $\mathbf{x}_0$ 的球)
   $= \dfrac{1}{4\pi r^2} \displaystyle\int_{B_r} \Delta u \ d\mathbf{x} = 0$

   故 $I(r) = k$ =constant.
3. u 在 $\mathbf{x}_0$ 點連續，$\therefore \lim\limits_{r\to 0} I(r) = u(\mathbf{x}_0)$，故 $k = u(\mathbf{x}_0)$，定理証畢。

Remark: $\dfrac{d}{dx} \displaystyle\int_c^d f(x,y)dy = \int_c^d \frac{\partial}{\partial x} f(x,y)dy$ 若 $f \in C^1[a,b] \times [c,d]$

我們將於第十四章中詳論之。

例 **3.** 熱傳導方程式 (Heat equation)

設 $u(x,y,z,t)$ 表空間中某物體 Ω 內一點 (x,y,z) 於 t 時刻的溫度，已知熱量傳遞的方向恆沿 ∇u 方向流動，且其速率與 $|\nabla u|$ 成正比，試証：u 滿足熱傳導方程

$$u_t = k\Delta u, \Delta u = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}$$

(設物體密度 ρ 爲常數)

分析：

1. 設該物體比熱爲 s，$\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ 爲該物體內某點，在 $\mathbf{x}_0$ 附近任取一適當領域 D 包含 $\mathbf{x}_0$

   由已知條件，物體在 D 上由 t 時刻到 $t + \Delta t$ 時刻熱量的增量爲

   $$\int_t^{t+\Delta t} \left(\int_{\partial D} c\nabla u \cdot \mathbf{n} dS \right) d\tau, \ c\text{爲某常數} \tag{10}$$

2. 又依熱量守恆定律，流進的熱量導致溫度的增加，其表現的形式爲

   $$\int_D \rho s[u(\mathbf{x}, t+\Delta t) - u(\mathbf{x}, t)] d\mathbf{x} \tag{11}$$

   ρ 爲密度，s 爲比熱，$u(\mathbf{x}, t+\Delta t) - u(\mathbf{x}, t)$ 表 $\mathbf{x}$ 在 $t \to t + \Delta t$ 時間內所增加溫度。
3. (11) = (10)，兩邊除以 Δt，令 $\Delta t \to 0$，有

   $$\int_D u_t(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x} = \int_{\partial D} k\nabla u \cdot \mathbf{n} dS = \int_D k(\text{div})\nabla u d\mathbf{x} = \int_D k\Delta u d\mathbf{x}, k = \frac{c}{\rho s} \tag{12}$$

4. (12) 式兩邊除以 $|D|$，令 $D \to \mathbf{x}_0$，得

   $$u_t(\mathbf{x}_0, t) = k\Delta u(\mathbf{x}_0, t)$$

5. 上式對一切 $\mathbf{x}_0$ 成立，故有

   $$u_t(\mathbf{x}, t) = k\Delta u(\mathbf{x}, t) \ \forall \ \mathbf{x}_n \Omega, t \geq 0$$

例 **4.** 毛細現象 (Capillary phenomenon)

設 U 爲一鉛直柱狀長管，其水平截面爲 Ω，將 U 插入某液體中，由於附著力、表面張力與地心引力的交互作用，液體在 U 內會上升 (如水與玻璃) 或下降 (如水銀與玻璃)，並在 U 內構成一曲面 S，此曲面稱爲毛細面 (Capillary surface)

設 $S : u = u(x,y), \ (x,y) \in \Omega$，

$$Tu = \frac{Du}{\sqrt{1 + |Du|^2}}, \quad Du = (u_x, u_y)$$

根據最小作用原理，u 滿足如下方程式：

$$\mathrm{div}Tu = \kappa u + H \quad \text{在}\Omega\text{內} \tag{13}$$

$$Tu \cdot \nu = \cos\gamma \quad \text{在}\partial\Omega\text{上} \tag{14}$$

其中 κ, H, γ 爲常數，$\kappa = \dfrac{\rho g}{\sigma}$，$\rho =$ 密度，$\sigma =$ 表面張力常數，$g =$ 重力常數。

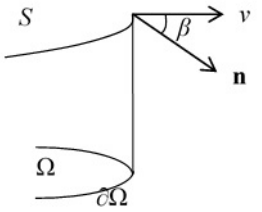
Remark:

1. $\mathrm{div}Tu = \dfrac{\partial}{\partial x}\dfrac{u_x}{\sqrt{1+u_x^2+u_y^2}} + \dfrac{\partial}{\partial y}\dfrac{u_y}{\sqrt{1+u_x^2+u_y^2}} = \cdots$
   $= [(1+u_y^2)u_{xx} - 2u_x u_y u_{xy} + (1+u_x^2)u_{yy}]/(1+u_x^2+u_y^2)^{3/2} = 2H(x,y)$
   $H(x,y)$ 表曲面 S 在 (x,y) 點的均曲率。
2. γ 表液體與柱壁間的接觸角（如圖），由液體與柱壁的物理性質所決定。
3. 當 $g \neq 0$，令 $v = u + \dfrac{H}{\kappa}$，(1)(2) 可寫成

   $$\mathrm{div}Tv = \kappa v \tag{15}$$

   $$Tv \cdot \nu = \cos\gamma \tag{16}$$

   此爲無體積限制下的毛細面，想像把 U 插入超大容器中內，液體自由上升或下降，所得曲面即是。



   $\mathbf{n}$ 爲 S 在 $\partial\Omega$ 上朝下單位法向量，$\nu = (\nu_1, \nu_2, 0), \mathbf{n}\cdot\nu = Tu\cdot\nu$
4. 當 $g = 0$ 時，我們有

   $$\mathrm{div}Tu = H \quad \text{在}\Omega\text{內} \tag{17}$$

   $$Tu \cdot \nu = \cos\gamma \quad \text{在}\partial\Omega\text{上} \tag{18}$$

   (17)(18) 式的解釋是：S 爲常均曲率曲面，且與柱壁接觸角爲 γ。

   (17) 式兩邊在 Ω 上積分，我們有

   $$H|\Omega| = \int_\Omega \mathrm{div}Tu d\mathbf{x} = \int_{\partial\Omega} Tu\cdot\nu dS = \cos\gamma\cdot|\partial\Omega|$$

   得

   $$H = \frac{|\partial\Omega|}{|\Omega|}\cdot\cos\gamma$$

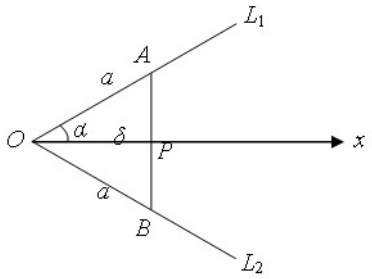
   其中 $|\Omega|$ 表 Ω 的面積，$|\partial\Omega|$ 表 $\partial\Omega$ 的周長。

以下我將探討 $\partial\Omega$ 有稜角的一些毛細現象。

爲方便討論，我將設 $\mathbf{O} \in \partial\Omega$, $\partial\Omega$ 在 $\mathbf{O}$ 點附近由二線段 L_1, L_2 所構成，並設 L_1, L_2 之夾角爲 2α.

a. $g = 0$

以 L_1, L_2 之分角線爲 x 軸，設 S 在 O 點附近可表爲 $u = u(x, y)$ 的函數型式。在 x 軸上任取一點 P，過 P 作 x 軸的垂線，交 L_1, L_2 於 A, B 二點，令 Δ 表三角形域 ΔOAB，$a = \overline{OA}, \delta = \overline{OP}$.



(17) 式兩邊在 Δ 上積分：

$$\begin{aligned} H|\Delta| &= \int_{\Delta} \mathrm{div} Tu \; dxdy \\ &= \int_{\partial\Delta} Tu \cdot \nu ds \\ &= \int_{\overline{AO}} + \int_{\overline{OB}} + \int_{\overline{BA}} (Tu \cdot \nu) ds \\ &= 2a\cos\gamma + \int_{\overline{BA}} Tu \cdot \nu ds \end{aligned} \tag{19}$$

注意：$|Tu \cdot \nu| \le |Tu| \le 1$, (19) $\Rightarrow$

$$H|\Delta| \ge 2a\cos\gamma - \overline{AB} = 2a\cos\gamma - 2a\sin\alpha$$

從而有

$\cos\gamma - \sin\alpha \le \dfrac{|\Delta|}{2a} \cdot H \to 0$ 當 $a \to 0$

$\Rightarrow \cos\gamma \le \sin\alpha$，或 $\sin\left(\dfrac{\pi}{2} - \gamma\right) \le \sin\alpha$

$\Rightarrow \alpha + \gamma \ge \dfrac{\pi}{2}$

換言之，若 $\alpha + \gamma < \dfrac{\pi}{2}$，$u$ 不存在 (當 Δ 夠小)

即：當 $\alpha+\gamma<\frac{\pi}{2}$ 時，毛細面不會以 graph 的型態定義在 O 點附近。

那麼液面將如何？

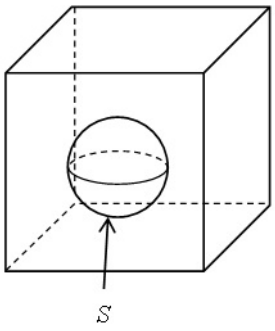
地心引力在此缺席，液面可以自由上升 (其實已無所謂" 上升")，將跑到 ∞ 點！

當然，現實生活中，體積是有限的，管長是有窮的。不妨假設容器是一立方體 Q，上方有蓋，Q 由玻璃構成。已知水與玻璃 $\gamma=0$，在 Q 內倒入一些水 W，將它送往太空 $(g=0)$，液面將如何？

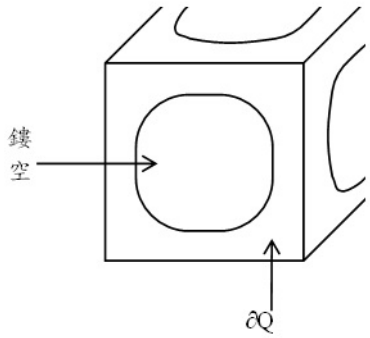
這要看 Q 中的水有多少。設 Q 的邊長爲 1，

(i) $|W|\geq 1-\frac{4}{3}\pi\left(\frac{1}{2}\right)^3$, $|W|$ 表水量，則 W 在 Q 中包一空球 S，S 即爲所得毛細面，S 可以在 Q 中移動，只要它動得了，都是解。

等號成立時，S 爲內切於 Q 之空球。



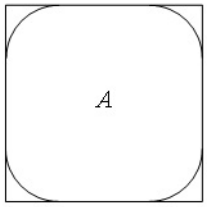
(ii) $|W|<1-\frac{4}{3}\pi\left(\frac{1}{2}\right)^3$，此時水量不夠，不足以讓 W 在 Q 內包出一球，它在 ∂Q 上必須鏤空，如圖。



這個空該怎麼鏤？
問得很好，不過我也沒辦法告訴你，這是個 open problem.
想像你把一個氣球 A 裝入 Q 內，當 Q 容不得 A 在 Q 內自由移動時，A 必須變形，才能裝入 Q 內 (當然，$|A|\leq|Q|$)，此時 A 的解就是太空中毛細面的解。

在平面上有所謂等周界不等式：

給定面積 A，以圓形的周界最小。今設若於單位方塊 Q 內，欲圍 A



$\mathbb{R}^2$ 中方塊內等周界問題的解。

(i) 當 $|A| < \pi\left(\frac{1}{2}\right)^2$ 時，可在 Q 內圍圓。

(ii) 當 $|A| > \pi\left(\frac{1}{2}\right)^2$ 時，∂A 必須有一部分貼著 ∂Q 走，其不貼著 $\partial\Omega$ 走的 (在 Ω 內部)，必須是相等的圓弧，且與 ∂Q 相切。

在 $\mathbb{R}^2$ 中方塊內的等周界問題，已知如此。

$\mathbb{R}^3$ 中單位立方塊 Q 內的等周界問題，其解如何？

聰明的，等你來回答吧！

b. $g \neq 0,\ \alpha + \gamma < \dfrac{\pi}{2}$

此時我們的方程式爲

$$\mathrm{div} Tu = \kappa u \quad \text{在}\Omega\text{內} \tag{20}$$

$$Tu \cdot \nu = \cos\gamma \quad \text{在}\partial\Omega\text{上} \tag{21}$$

(i) 取 Δ 如 $g = 0$ 中的 ΔOAB

(20) 式兩邊在 Δ 上積分，利用散度定理，及 $|Tu| \leq 1$ 的特性，我們有

$$2a\cos\gamma - 2a\sin\alpha \leq \int_\Delta \kappa u \ dxdy \leq 2a\cos\gamma + 2a\sin\alpha \tag{22}$$

$\alpha + \gamma < \dfrac{\pi}{2} \Rightarrow \cos\gamma - \sin\alpha > 0$

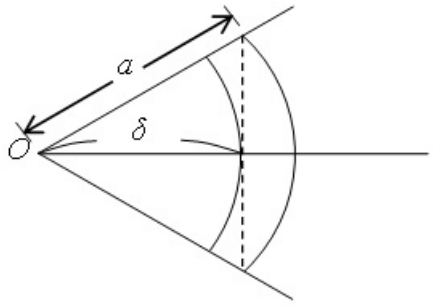
又 $\displaystyle\int_\Delta \kappa u \ dxdy = \kappa u(\mathbf{x})|\Delta| = \kappa u(\mathbf{x}) 2a^2 \sin 2\alpha, \mathbf{x}$ 爲 Δ 中某點，

(22) $\Rightarrow u(\mathbf{x}) \geq \dfrac{\cos\gamma - \sin\alpha}{\kappa a \sin 2\alpha} \to \infty$ 當 $a \to 0$ (設 $\kappa > 0$)

即：u 在 $\mathbf{o}$ 點附近 unbounded!

(ii) u 在 **o** 點附近的行爲如何？

不妨設 $u = O(r^\lambda)$ (即 $\lim\limits_{r\to 0^+} \dfrac{u}{r^\lambda}$ =constant)



令 $\Omega_r = \Omega \cap B_r(\mathbf{o})$，根據 (i)，不妨設 $u > 0$ 在 Ω_a 上 (設 $\kappa > 0$)

$\Omega_\delta < \Delta < \Omega_a$，故有

$$\begin{aligned}\int_{\Omega_\delta} \kappa u \cdot r \; dr d\theta &\le \int_\Delta \kappa u \; dxdy \\ &\le 2a(\cos\gamma + \sin\alpha) \\ &= 2\delta \sec\alpha(\cos\gamma + \sin\alpha) \end{aligned} \tag{23}$$

$$\int_{\Omega_a} \kappa u \cdot r \; dr d\theta \ge \int_\Delta \kappa u \; dxdy \ge 2a(\cos\gamma - \sin\alpha) > 0 \tag{24}$$

$(23), (24) \Rightarrow$ $\exists$ constants M_1, M_2 使

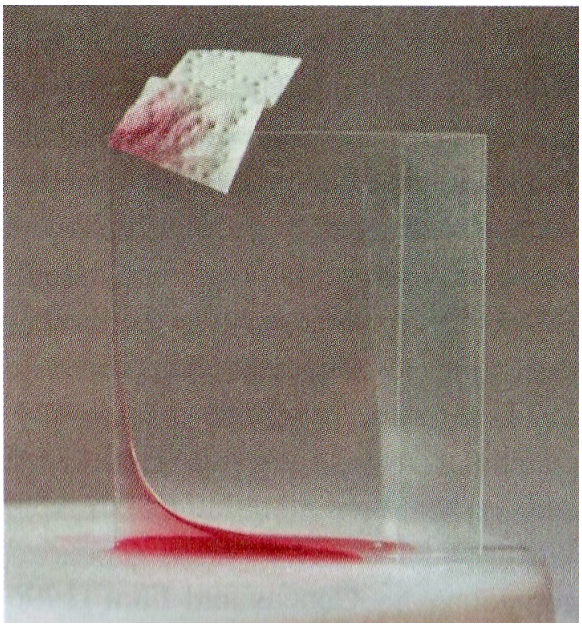
$$\frac{1}{\delta}\int_0^\delta r^{1+\lambda} dr < M_1 \tag{25}$$

$$\frac{1}{a}\int_0^a r^{1+\lambda} dr > M_2 \tag{26}$$

$(25), (26) \Rightarrow 1 + \lambda = 0 \;\; \therefore \lambda = -1$

故我們可猜測：$u = O\left(\dfrac{1}{r}\right)$，在 O 點附近。

如圖 (Pacific Journal of Mathematics Vol. 236, No.2, 2008, P.283)



$\alpha+\gamma<\dfrac{\pi}{2}$，毛細面在稜角附近的行爲。

(iii) 比較函數 (Comparison function)

u 既然 $=O\left(\dfrac{1}{r}\right)$，表示 u 在鉛直方向" 幾乎" 是直的 (當 $r\to 0$)，

因此對曲率的貢獻幾乎是 0。

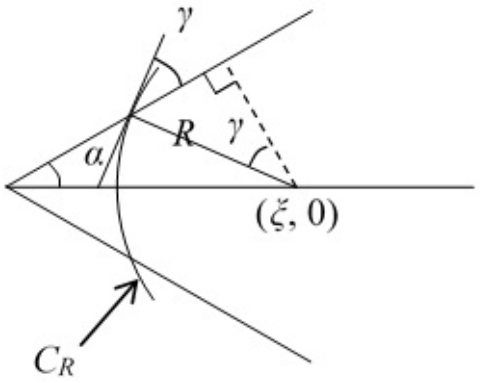
換言之，u 的均曲率" 幾乎" 由等高線所提供，當 $r\to 0$(這兩個方向互相垂直，他們兩個曲率的平均值就是均曲率)

就以上的分析，想把 u 在 O 點附近的行爲作更清晰的描述，想法：

尋找曲面 $v=v(r,\theta)$ 滿足

$$\begin{cases} v(r,0)=\dfrac{1}{r} \\ v\text{的等高線爲圓弧}C_R,\ C_R\text{與柱壁交角爲}\gamma,\ R\text{表圓弧半徑} \\ C_R\text{的曲率}=\kappa v \end{cases}$$

設 C_R 的心爲 $(\xi,0)$，如圖，$R\cos\gamma=\xi\sin\alpha$



∴

$$\xi = \frac{\cos\gamma}{\sin\alpha}R = \lambda R, \lambda = \frac{\cos\gamma}{\sin\alpha} > 1 \tag{27}$$

設 $(x, y) \in C_R$，則

$$(x-\xi)^2 + y^2 = R^2$$

以極座標 $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$ 及 (27) 代入，得

$$r^2 - 2\lambda R \cdot r\cos\theta + \lambda^2 R^2 = R^2$$

⇒

$$\left(\frac{r}{R}\right)^2 - 2\lambda\cos\theta \cdot \left(\frac{r}{R}\right) + (\lambda^2 - 1) = 0$$

解之得

$$\frac{r}{R} = \lambda\cos\theta \pm \sqrt{1 - \lambda^2\sin^2\theta}$$

取負號 (+ 號非所求) 得

$$\frac{1}{R} = \frac{\lambda\cos\theta - \sqrt{1-\lambda^2\sin^2\theta}}{r}$$

而 C_R 的曲率 $= \kappa v, \therefore$

$$v = \frac{1}{\kappa}\cdot\frac{1}{R} = \frac{\lambda\cos\theta - \sqrt{1-\lambda^2\sin^2\theta}}{\kappa r},\ -\alpha < \theta < \alpha$$

猜：$u \sim v$ 當 $r \sim 0$

Concus and Finn 於 1974 証明：$\exists$ constant A 使

$$\left| u - \frac{\lambda\cos\theta - \sqrt{1-\lambda^2\sin^2\theta}}{\kappa r} \right| < A$$

在 O 點的某鄰域 Ω_ρ 內，A 與 u, ρ 有關。

這是毛細面研究上一個重要的發現。

世界上有高達百米的巨樹，這些樹如何把水分送往樹尖？
是利用 $\alpha + \gamma < \frac{\pi}{2}$ 的原理或者其他的機制？有待生物學家來回答。

我想一棵巨樹能把水分送上百米高處，光靠 $\alpha + \gamma < \frac{\pi}{2}$ 的毛細機制，似乎力有未逮，它的管線應該有更複雜的結構，不會僅僅是一根單純的空心管。

一棵樹有這種能耐，不覺讓我肅然起敬。

12.5 旋度與 Stokes 定理

a. 循環量 (Circulation)

設 $\mathbf{F}$ 爲 $\mathbb{R}^3$ 中定義於某開領域 Ω 上的向量場，$\mathbf{F} \in C^1(\Omega)$，$\Gamma \subset \Omega$ 爲一片段平滑封閉曲線。

定義：$\int_\Gamma \mathbf{F} \cdot \mathbf{T} ds$ 稱爲 $\mathbf{F}$ 在 Γ 上的循環量。

其中積分方向以右手拇指指向 z 軸正向，四指所指方向即爲積分方向。

$\mathbf{T}$ 表 Γ 上單位切向量，ds 表 Γ 上弧元，給定直角坐標系，設

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= (P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z)) \\ \Gamma &: (x(t), y(t), z(t)),\ a \le t \le b \end{aligned}$$

則

$$\begin{aligned} \mathbf{T} &= (x', y', z')/\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2} \\ ds &= \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}\, dt \\ \mathbf{T}ds &= (x', y', z')dt = (dx, dy, dz) \end{aligned}$$

故

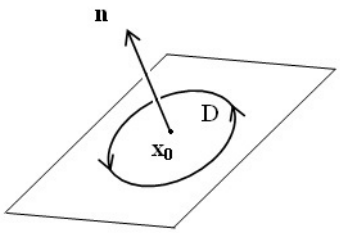
$$\int_\Gamma \mathbf{F} \cdot \mathbf{T} = \int_\Gamma P dx + Q dy + R dz$$

b. 旋度

承上，設 $\mathbf{x}_0 \in \Omega$，給定方向 $\mathbf{n}$，過 $\mathbf{x}_0$ 以 $\mathbf{n}$ 爲法向作平面 E，於 E 上，在 $\mathbf{x}_0$ 點附近任取適當領域 $D \subset E$，考慮：

$$\lim_{D \to \mathbf{x}_0} \frac{1}{|D|} \int_{\partial D} \mathbf{F} \cdot \mathbf{T} ds,\ |D| \text{表} D \text{的面積}$$

若此極限存在，我們稱它爲 $\mathbf{F}$ 在 $\mathbf{x}_0$ 點，以 $\mathbf{n}$ 爲軸的旋度。

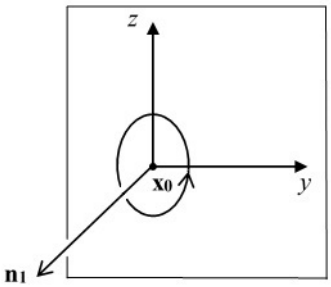


注意：旋度是循環量對垂直於旋軸之平面面元的微分，可以這樣的理解。

有三個方向的旋度特別值得注意：

(i) $\mathbf{n}_1 = (1, 0, 0)$

如圖，

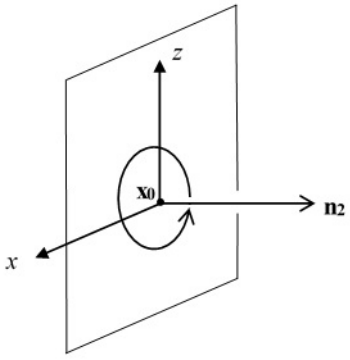


$$\int_{\partial D} \mathbf{F} \cdot \mathbf{T} ds = \int_{\partial D} Q dy + R dz = \int_D (R_y - Q_z) dy dz \quad \text{(Green's 定理)}$$

$$\therefore \lambda_1 = \lim_{D \to \mathbf{x}_0} \frac{1}{|D|} \int_D (R_y - Q_z) dy dz = R_y(\mathbf{x}_0) - Q_z(\mathbf{x}_0)$$

同理，

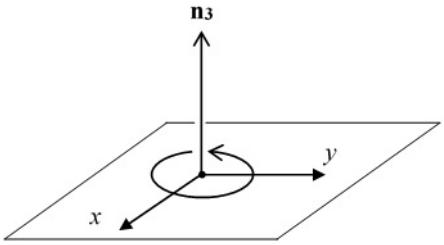
(ii) $\mathbf{n}_2 = (0, 1, 0)$



$$\begin{aligned} \lambda_2 &= \lim_{D \to \mathbf{x}_0} \frac{1}{|D|} \int_{\partial D} \mathbf{F} \cdot \mathbf{T} ds \\ &= \lim_{D \to \mathbf{x}_0} \frac{1}{|D|} \int_D R dz + P dx \\ &= P_z(\mathbf{x}_0) - R_x(\mathbf{x}_0) \end{aligned}$$

(注意積分的方向導致 $P_z - R_x$ 而不是 $R_x - P_z$)

(iii) $\mathbf{n}_3 = (0, 0, 1)$



$$\begin{aligned}\lambda_3 &= \lim_{D\to\mathbf{x}_0}\frac{1}{|D|}\int_{\partial D}\mathbf{F}\cdot\mathbf{T}ds \\ &= \lim_{D\to\mathbf{x}_0}\frac{1}{|D|}\int_{D}Pdx+Qdy \\ &= Q_x(\mathbf{x}_0)-P_y(\mathbf{x}_0)\end{aligned}$$

c. 旋度向量

定義：$\text{curl}\mathbf{F}=(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)=\ (R_y-Q_z,P_z-R_x,Q_x-P_y)\Big|_{\mathbf{x}_0}$

記作 $=\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & R\end{vmatrix}_{\mathbf{x}_0}$，稱爲 $\mathbf{F}$ 在 $\mathbf{x}_0$ 點的旋度向量。

其中 $f\Big|_{\mathbf{x}_0}$ 表示 f 在 $\mathbf{x}_0$ 點取值。

一如方向導數，f 在 $\mathbf{x}_0$ 點沿 $\mathbf{u}$ 方向的方向導數

$$D_{\mathbf{u}}f(\mathbf{x}_0)=\nabla f(\mathbf{x}_0)\cdot\mathbf{u}$$

其中 $\nabla f(\mathbf{x}_0)=(f_x(\mathbf{x}_0),f_y(\mathbf{x}_0),f_z(\mathbf{x}_0))$，$f_x(\mathbf{x}_0),f_y(\mathbf{x}_0),f_z(\mathbf{x}_0)$ 分別表 f 在 $\mathbf{x}_0$ 點沿三個座標軸的偏導數。

對於旋度，我們有如下定理：

定理 **12-2**

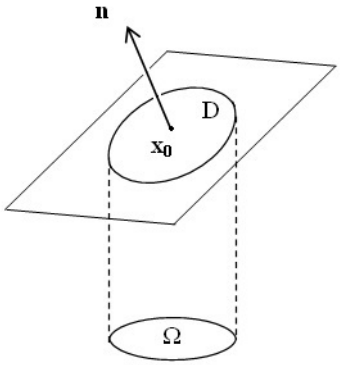
$\mathbf{F}$ 在 $\mathbf{x}_0$ 點，以 $\mathbf{n}$ 爲軸的旋度 $=\text{curl}\mathbf{F}(\mathbf{x}_0)\cdot\mathbf{n}$

証：設 $E: z=ax+by+c$ 過 $\mathbf{x}_0$ 點，以 $\mathbf{n}$ 爲法向量，則
$\mathbf{n}=(-z_x,-z_y,1)/\sqrt{z_x^2+z_y^2+1}=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$

注意：

$$\begin{aligned} dS &= \sqrt{1+z_x^2+z_y^2}dxdy \\ dS\cos\alpha &= -z_x dxdy \\ dS\cos\beta &= -z_y dxdy \\ dS\cos\gamma &= dxdy \end{aligned}$$

D 爲 E 上含 $\mathbf{x}_0$ 點的適當領域，Ω 爲 E 在 x,y 平面上的投影，



$$\int_{\partial D}\mathbf{F}\cdot\mathbf{T}ds = \int_{\partial D}Pdx+Qdy+Rdz$$

$$\begin{aligned} \int_{\partial D}Pdx &= \int_{\partial\Omega}P(x,y,z(x,y))dx \\ &= \int_{\Omega}-\frac{\partial}{\partial y}P\ dxdy \quad \text{(Green's 定理)} \\ &= \int_{\Omega}-(P_y+P_z\cdot z_y)dxdy \\ &= \int_{D}(-P_y\cos\gamma+P_z\cos\beta)ds \end{aligned} \tag{28}$$

同理，

$$\begin{aligned} \int_{\partial D}Qdy &= \int_{\partial\Omega}Q(x,y,z(x,y))dy \\ &= \int_{\Omega}\frac{\partial}{\partial x}Qdxdy \\ &= \int_{\Omega}-(Q_x+Q_z\cdot z_x)dxdy \\ &= \int_{D}(Q_x\cos\gamma-Q_z\cos\alpha)ds \end{aligned} \tag{29}$$

$$\int_{\partial D} R dz = \int_{\partial\Omega} R(x,y,z(x,y))dz, \quad dz = z_x dx + z_y dy$$

$$= \int_{\partial\Omega} (Rz_x)dx + (Rz_y)dy$$

$$= \int_{\Omega} \left[\frac{\partial}{\partial x}(Rz_y) - \frac{\partial}{\partial y}(Rz_x)\right] dxdy$$

$$= \int_{\Omega} (R_x \cdot z_y - R_y \cdot z_x)dxdy$$

$$= \int_{D} (-R_x \cos\beta + R_y \cos\alpha)ds \tag{30}$$

(28)(29)(30) $\Rightarrow$

$$\int_{\partial D} \mathbf{F}\cdot\mathbf{T}dS = \int_D [(R_y - Q_z)\cos\alpha + (P_z - R_x)\cos\beta + (Q_z - P_y)\cos\gamma]dS$$

$\therefore$

$$\begin{aligned}\lim_{D\to\mathbf{x}_0} \frac{1}{|D|}\int_{\partial D} \mathbf{F}\cdot\mathbf{T}ds &= [(R_y - Q_x)\cos\alpha + (P_z - R_x)\cos\beta + (Q_x - P_y)\cos\gamma]\Big|_{\mathbf{x}_0} \\ &= \mathrm{curl}\mathbf{F}(\mathbf{x}_0)\cdot\mathbf{n}\end{aligned}$$

d. Stokes 定理

設 S 爲 $\mathbb{R}^3$ 中平滑曲面，$\mathbf{x}\in S, \mathbf{n} = \mathbf{n}(\mathbf{x})$ 爲 S 在 $\mathbf{x}$ 點朝上單位法向量。
$\mathbf{F}$ 如前所述，由旋度的定義及定理 12-2，

$$\mathrm{curl}\mathbf{F}\cdot\mathbf{n} = \text{以 } \mathbf{n} \text{ 爲軸，循環量對切平面面元的微分}$$

$$\mathrm{curl}\mathbf{F}\cdot\mathbf{n} = \frac{d(\text{循環量})}{dS}$$

切平面面元即曲面面元，此處 dS 表曲面面元，依形上觀微積分基本定理，

$$\mathrm{curl}\mathbf{F}\cdot\mathbf{n} \text{ 在 } S \text{ 上對面元積分要還原成 } \mathbf{F} \text{ 在 } \partial S \text{ 上的循環量}$$

即：

<u>定理 **12-3**</u> (Stokes 定理)

$$\int_S \mathrm{curl}\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}dS = \int_{\partial S} \mathbf{F}\cdot\mathbf{T}ds$$

分析：設 S 可表成 $z = z(x,y), (x,y)\in\Omega$

Stokes 定理的証明，在定理 12-2 中已演習完畢，只不過把 D 換成 S，$z = ax + by + c$ 改成 $z = z(x,y)$，一切進行如前，不再重複。

例 **1.** 陀螺以等角速度 ω 對中心軸旋轉，求其對轉軸的旋度。

解：設轉軸爲 z 軸，陀螺上一點 P 與轉軸距離爲 r，設 $\mathbf{F}$ 表速度向量場，D_r 表陀螺內垂直於 z 軸，半徑爲 r 的圓盤。

於 ∂D_r 上，$\mathbf{F}\cdot\mathbf{T} = v$(切線速度)$= r\omega$，故

$$\frac{1}{D_r}\int_{\partial D_r}\mathbf{F}\cdot\mathbf{T}ds = \frac{1}{\pi r^2}\int_0^{2\pi} r\omega\cdot r d\theta = 2\omega$$

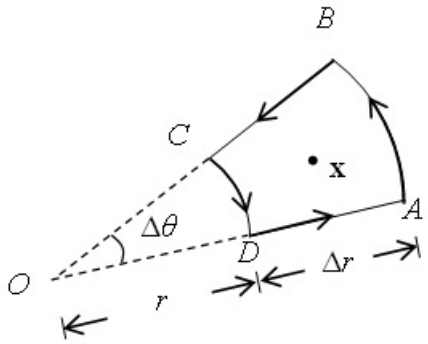
即；陀螺對稱軸上任一點沿軸方向的旋度爲 2ω.

此向量場對轉軸外一點 $\mathbf{x}$ 沿軸方向的旋度如何？

取扇窗域 Ω 如圖：

$$|\Omega| = \Delta r\cdot\left(r+\frac{1}{2}\Delta r\right)\Delta\theta$$

$$\begin{aligned}\int_{\partial\Omega}\mathbf{F}\cdot\mathbf{T}ds &= \int_A^B + \int_B^C + \int_C^D + \int_D^A \mathbf{F}\cdot\mathbf{T}ds\\ &= I_1 + I_2 + I_3 + I_4\end{aligned}$$



$I_2 = I_4 = 0$, 因 $\mathbf{F}\cdot\mathbf{T} = 0$ 在 $\overline{BC}$ 及 $\overline{DA}$ 上

$$I_1 = \int_\theta^{\theta+\Delta\theta}(r+\Delta r)\cos(r+\Delta r)d\theta = (r+\Delta r)^2\omega\theta$$

$$I_3 = \int_{\theta+\Delta\theta}^{\theta}(-r\omega)(-rd\theta) = -r^2\omega\Delta\theta$$

(注意：在 $\overset{\frown}{\mathrm{CD}}$ 上，$\mathbf{F}\cdot\mathbf{T} = -r\omega, ds = -rd\theta$)

$$\frac{1}{|\Omega|}\int_{\partial\Omega}\mathbf{F}\cdot\mathbf{T}ds = \frac{(r+\Delta r)^2 - r^2}{(r+\frac{1}{2}\Delta r)\Delta r}\omega \to 2\omega\text{，當 }\Delta r\to 0$$

curl$\mathbf{F}$ 又如何？

陀螺上一點 P 的運動軌跡

$$x = r\cos\omega t, y = r\sin\omega t$$

$\mathbf{F} = (x', y', 0) = (-\omega r\sin\omega t, \omega r\cos\omega t, 0) = \omega(-y, x, 0)$，故

$$\text{curl}\mathbf{F} = \omega \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -y & x & 0 \end{vmatrix} = \omega(-1, -1, 2)$$

例 **2.**

(a) $\mathbf{V} = \text{curl}\mathbf{F}$，則 $\text{div}\mathbf{V} = 0$

(b) $\mathbf{V} = (x - y, y - z, x + y - 2z)$，顯然 $\text{div}\mathbf{V} = 0$

問：是否存在 $\mathbf{F}$ 使 $\text{curl}\mathbf{F} = \mathbf{V}$？

分析：

(a) 顯然。

(b) 設 $\mathbf{F} = (P, Q, R)$，欲問：

$$\begin{cases} R_y - Q_z &= x - y \\ P_z - R_x &= y - z \\ Q_x - P_y &= x + y - 2z \end{cases}$$

是否可解？

不妨試 $R = 0$，問題簡化成：尋 P, Q 使

$$-Q_z = x - y \tag{31}$$

$$P_z = y - z \tag{32}$$

$$Q_x - P_y = x + y - 2z \tag{33}$$

由 (31)，$Q = -xz + yz + g(x, y)$
由 (32)，$P = yz - \frac{1}{2}z^2 + f(x, y)$

$$Q_x - P_y = (-z + g_x) - (z + f_y) \tag{34}$$

比較 (33)(34) 得

$$-f_y + g_x = x + y$$

取 $f = -xy, g = xy$，得

$$\begin{aligned} P &= yz - \frac{1}{2}z^2 - xy \\ Q &= -xz + yz + xy \end{aligned}$$

令 $\mathbf{F} = (P, Q, \mathbf{0})$ 即得。

上面的處理方法，可以推廣到一般的向量場，我把它列爲定理陳述如下，其証明就留給同學當習題吧。

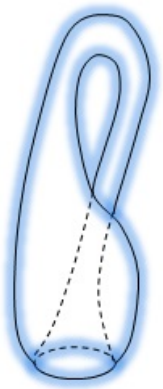
定理 **12-4**

設 $\mathbf{V} \in C(\Omega)$ 爲 $\mathbb{R}^3$ 中向量場，$\mathrm{div}\mathbf{V} = 0 \; \forall \; \mathbf{x} \in \Omega$，則存在一向量場 $\mathbf{F} \in C^1(\Omega)$ 使 $\mathrm{curl}\mathbf{F} = \mathbf{V}$.

附錄 A

Kleine Bottle (自我相交的封閉曲面)
一根塑膠管，把它加熱彎曲，首尾相接，得到一輪胎面。

一根塑膠管，下半段加熱撐開成酒瓶狀，上半段加熱拉長如鶴頸，下彎穿入瓶身，向下拉長至瓶底，首尾相接－如上述輪胎之建造，得一自我相交的封閉曲面，稱爲 Kleine Bottle(如圖)



輪胎有內外之分，生活在 Kleine Bottle 上的生物，不知有內外。

附錄 **B:** 再談高斯曲率

爲了介紹形上觀微積分基本定理，我於 12-3 節中介紹了高斯曲率和均曲率，這兩個曲率統籌了曲面的性質，各領風騷，高斯曲率與曲面的內蘊性質相關，均曲率與曲面的外置性質相關，這是微分幾何相當精華的一章。

通常在高等微積分裡是不會談曲面的曲率的，我這樣講好像已經逾越了傳統高等微積分的內容。不過，數學無定則，我希望你們能從各個層面上來了解微積分基本定理的內涵，高斯曲率是個很好的題材。

既然談了高斯曲率，我難免有" 不吐不快" 的內傷。又不好在高微教材內談它，只好把它放在這裡當成附錄，希望對你們將來學習微分幾何有所幫助。

整本微分幾何最重要的定理就是 Gauss-Bonnet 定理，我這樣認爲。Gauss 提出它，Bonnet 推廣它，就成了 Gauss-Bonnet 定理。

我們且就 Gauss 原始提出的定理內容來了解它：

a. 測地線 (Geodesic of a surface)

設 S 爲 $\mathbb{R}^3$ 中 C^2 曲面，$P, Q \in S$，存在一曲線 $\Gamma \subset S$，連接 P, Q 兩點，具有以下性質：

$$|\Gamma| \leq |C| \ \forall\ C \subset S，C \text{ 爲連接 } P, Q \text{ 兩點的曲線。}$$

其中 $|\Gamma|$ 表 Γ 的曲線長，$|C|$ 同。

這條曲線 Γ 就稱爲 S 上連接 P, Q 兩點的測地線。

想像有一種生物，生活在 S 上，測地線就是他們認爲的直線。

當生物由 P 點到 Q 點，沿 Γ 行走，它覺得沒有" 左右" 偏離，走冤枉路，就像船航行於赤道上 (或地球的大園上) 一樣，自覺勇往直前。

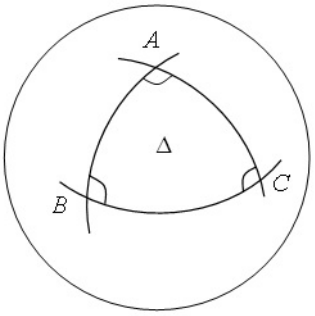
b. Gauss 定理

我們於第一章的習題中曾見過 Gauss 的 genius 推論：

$$\text{單位球面上三角形內角和} \ - \ \text{三角形面積} = \pi$$

如圖，即：

$$\angle A + \angle B + \angle C - |\Delta| = \pi,\ |\Delta| \text{表三角形} \Delta \text{的面積}$$



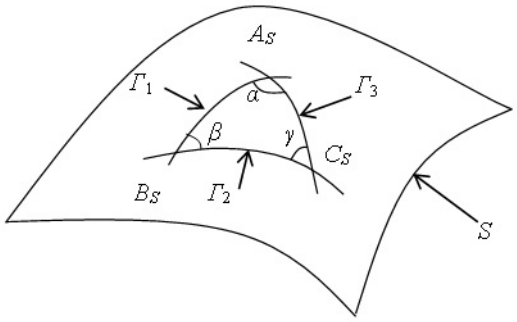
這件事，對任意曲面 S 上的三角形 Δ_S 都成立，就是 Gauss 定理，

只不過 $|\Delta|$ 要換成 $\int_{\Delta_s} KdS$

Gauss 定理：

設 S 爲 $\mathbb{R}^3$ 中 C^2 曲面，$\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$ 爲 S 中三測地線，在 S 上構成一三角形 $\Delta_s = \Delta A_s B_s C_s$，令 α, β, γ 分別表此三角形的三內角，則

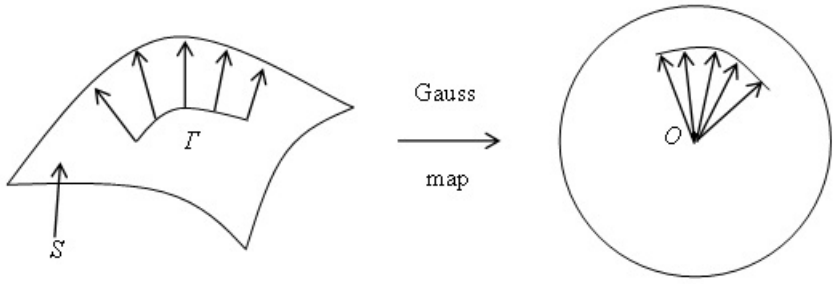
$$\alpha + \beta + \gamma - \int_{\Delta_S} KdS = \pi \tag{35}$$



Gauss 是怎麼看出這個定理呢？

我且試著了解 Gauss，分析如下：

1. 設 Γ 爲 S 上的測地線，人沿 Γ 行走，只有上下起落，沒有左右偏移，因此 S 在 Γ 上的單位法向量經 Gauss map 後在單位球面上爲一直線 (大圓)



2. 因此，Δ_S 上的單位法向量經 Gauss map 後在單位球面上構成一球面三角形 $\Delta = \Delta ABC$，$\Gamma_1 \to \overset{\frown}{\mathrm{AB}}, \Gamma_2 \to \overset{\frown}{\mathrm{BC}}, \Gamma_3 = \overset{\frown}{\mathrm{CA}}$，此映射不改面三角形的內角。$\alpha = \angle A, \beta = \angle B, \gamma = \angle C$

3. 由形上觀微積分基本定理知

$$\int_{\Delta_S} KdS = |\Delta|$$

故

$$\alpha + \beta + \gamma - \int_{\Delta_s} KdS = \angle A + \angle B + \angle C - |\Delta| = \pi$$

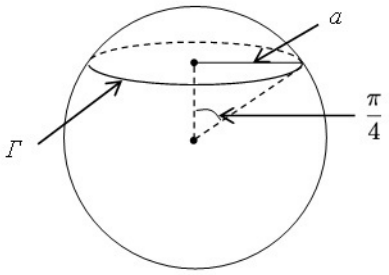
以上我只是和你談看法，許多" 因此" 都需要証明，嚴格的証明還是要到微分幾何課本內去探尋。

有時候你的 $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$ 未必是測地線，領域也未必是三角形，那麼 Gauss 定理該如何推廣呢？Bonnet 引入了測地曲率 (Geodesic curvature)，把 Gauss 定理推廣到一般領域上，就是所謂的 Gauss-Bonnet 定理，這是微分幾何的核心定理，讀微分幾何必須要清楚它的內容，才稱得上修過微分幾何。

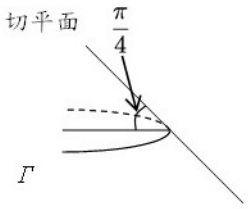
什麼是測地曲率呢？

一個人在測地線上行走，只有上下起伏，沒有左右偏離。沒有覺得偏離，測地曲率爲 0。

一個人在北緯 45° 上行走，他的行跡 Γ 是向北極彎曲的，Γ 的半徑 $a = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$，Γ 作爲 $\mathbb{R}^3$ 中的曲線，其曲率爲 $\kappa = \sqrt{2}$



(a)



(b)

Γ 作爲單位球面 S 上的曲線，它向北極彎曲的曲率爲 κ 在切平面上的分量

$$\kappa_g = \kappa \cos 45^\circ = \kappa \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = 1$$

這個 κ_g 就是 Γ 對球面的測地曲率。

今設 Γ_a 爲單位球上的小圓，$\Gamma_a \subset \mathbb{R}^3$，半徑爲 a，其 $\mathbb{R}^3$ 中曲率爲 $\kappa = \dfrac{1}{a}$

$$\kappa_g = \kappa \cos\theta = \frac{1}{a} \cdot \sqrt{1-a^2}$$

$$\int_{\Gamma_a} \kappa_g ds = \frac{\sqrt{1-a^2}}{a} \cdot 2\pi a = 2\pi\sqrt{1-a^2}$$

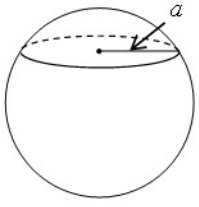
令 Σ 爲 Γ_a 在 S 上所圍曲面領域 (取小的那一片)，

則 $|\Sigma|$(Σ 的面積)$= \dfrac{1-\sqrt{1-a^2}}{2} \cdot 4\pi = 2\pi(1-\sqrt{1-a^2})$(請想一想)

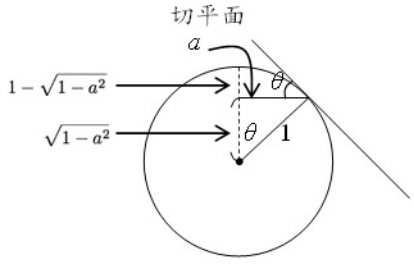
$$\int_{\Sigma} K dS = |\Sigma| = 2\pi(1-\sqrt{1-a^2})$$

且看

$$\int_{\Gamma_a} \kappa_g ds + \int_{\Sigma} K dS = 2\pi \tag{36}$$



(a)



(b)

上面這個式子對任何曲面 S 上的平滑曲線 Γ 都成立，

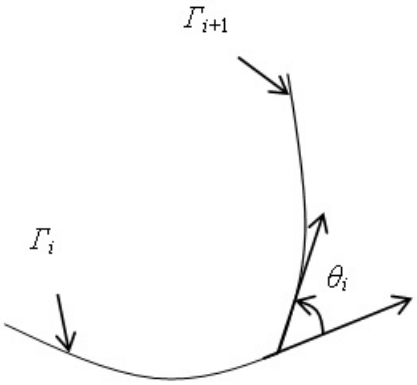
⇒

$$\int_{\Gamma} \kappa_g ds + \int_{\Sigma} K dS = 2\pi \tag{37}$$

$\Sigma \subset S, \Gamma = \partial\Sigma, \kappa_g$ 爲 Γ 在 S 上的測地曲率。

當 $\partial\Sigma$ 爲片段平滑時，設 $\partial\Sigma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \cdots \cup \Gamma_n, \Gamma_i \in C^1$，令 θ_i 爲 Γ_i, Γ_{i+1} 的切向量，依逆時爲正，順時爲負，所夾之角 (如圖)。θ_i 相當於多邊形的外角，則有

$$\sum_{i=1}^{n} \theta_i + \sum_{i=1}^{n} \int_{\Gamma_i} \kappa_g ds + \int_{\Sigma} K dS = 2\pi \tag{38}$$



再補充說明 $\int_{\Gamma} \kappa_g ds$ 的意義：

Γ 作爲 $\mathbb{R}^3$ 中的曲線，有其 $\mathbb{R}^3$ 中的曲率 κ，此曲率在 S 的切平面上的分量即爲 κ_g。

κ 如何求？

設 $\mathbf{x}(s)$ 爲 Γ 的弧長參數表示式，則 $\mathbf{x}'(s)$ 爲 Γ 的單位切向量，$\mathbf{x}''(s)$ 即 Γ 的曲率向量，$\kappa = |\mathbf{x}''(s)|$。

如何了解 (38) 式呢？

a. 以平面上的情形來看 $(K = 0)$ 有如下解讀：

(i) 多邊形外角和 $= 2\pi$, $(\kappa_g = 0)$

(ii) 若 $\Gamma = \partial\Sigma$ 爲平滑封閉曲線，則 $\int_{\Gamma} \kappa ds = 2\pi$，$\kappa$ 表 Γ 的曲率，此即定理 12-1 的內容。

(iii) 若 Σ 爲由 $\Gamma_1, \Gamma_2, \cdots, \Gamma_n$ 所圍區域，$\Gamma_i \in C^1$，則 Σ 的諸外角和 $+ \sum_{i=1}^{n} \int_{\Gamma_i} \kappa ds = 2\pi$

b. 在單位球面上則有

$$\text{多邊形的外角和} + \text{多邊形的面積} = 2\pi, \ (\kappa_g = 0)$$

c. 在任意 C^2 曲面上則有

$$\text{多邊形的外角和} + \text{多邊形法向所張之立體角} = 2\pi, \ (\kappa_g = 0)$$

我衷心盼望你們讀書要培養看法，有了看法，觸類旁通，才能進入形而上世界，對事務有所靈判，日久生功，匯百川而成大河，氣象自是非凡，信手捻來盡是學問。能引領風騷，成一家之言，能嘉惠後進，育無數之人才。雖然我沒有做到，不過我曾見過這樣的人，如沐春風，如飲甘泉，終生受益不盡。

大學之道在明明德，在親民，在止於至善。我希望年輕人讀書要有這樣的胸襟和氣魄。可和天地對話，能探宇宙奧秘。

讀書之餘，我常會問：生命的本質是什麼？

不要笑我思考這樣的 "Stupid Problem!" 人知道探詢這樣的問題，人就不一樣。讀數學要問數學的本質是什麼？ 何況遷涉到生命價值的人生！

既生為人卻不知道思考這個問題，就像進了數學系，不知要問數學的本質是什麼一樣，終究是糊里糊塗的進來，糊里糊塗的出去。

讀聖賢書使我受益無窮，稍有所悟，欣然於心。人生不再糊塗，是非善惡，皓月千里，行所該行，止所該止，俯仰無愧於天地，一呼一吸都覺得自在芬芳。

讀歷史，來到南宋末年，天地變色。我常問：是什麼力量讓文天祥展現那麼偉大的氣節？

元相孛羅把他押到樞密院親自審問，他昂然而立，只拱手作禮，孛羅怒，令人強押於地，問：你還有何話可說？答：天下事有興有衰，國亡受戮，夫復何言，但願早死。

妻女淪為奴隸，女兒寫信向他求救，他回信道：收女兒信，痛割肝腸，人誰無妻兒骨肉，但今日事，於義當死。命也，奈何！爹爹我救不了你，望你在世認真做人。

投降的宋恭帝來到牢房，勸他投降，他北跪於地，背對降帝，痛哭流涕，對趙說道：聖駕請回。

軟的不吃，就來硬的，把他押入苦牢，潮濕陰冷，坐立不得，他寫下正氣歌。

如是三年，不改其志。

大可汗忽必略親自招見，他依然昂立，可汗勸降，允諾厚祿，他道：但求一死。

1282，十二月初九日，終於就義。

皇路當清夷，含和吐明庭。時窮節乃見，一一垂丹青。

那力量來自對生命的體悟，超越一切宗教，直接遁入無窮，是一種內在生命價值的呈現與完成。凌駕死生，光照日月。偉哉！斯人。

「可以託六尺之孤，可以寄百里之命，臨大節而不可奪。」風簷展書讀，古道照顏色。美哉，中華文化！

(第十二章全文完)