Chapter 11

再談 Riemann 積分

11.1 積分的回顧

a. Riemann 的觀點

設 f 爲定義於 $[a,b]$ 上的實函數。

$P: a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$ 爲 $[a,b]$ 上的一分割，

令 $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$，$\|P\| = \max\limits_{i=1,2,\cdots,n} \Delta x_i$ (the mesh of P)

任取 $t_i \in [x_{i-1}, x_i]$，考慮

$$\sum_{i=1}^{n} f(t_i)\Delta x_i$$

稱爲 f 的一個 Riemann sum。

Riemann 說：若存在一實數 A 滿足：

$$\forall\, \epsilon > 0,\ \exists\, \delta > 0 \text{ 使得 } \left|\sum_{i=1}^{n} f(t_i)\Delta x_i - A\right| < \epsilon,\ \text{當}\|P\| < \delta \tag{1}$$

那麼稱 f 在 $[a,b]$ 上可積分，那個 A 就以 $(R)\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ 表示之，

稱爲 f 在 $[a,b]$ 上的 Riemann 積分。

Remark:

1. 根據 (1)，對 $\epsilon = 1$, $\exists\, \delta$ 使

$$\left|\sum_{i=1}^{n} f(t_i)\Delta x_i\right| < A + 1,\ \text{當}\|P\| < \delta$$

因此 $f(t_i)$ 不可以任意大，$\forall\, t_i \in [x_{i-1}, x_i],\ i = 1, 2, \cdots$

換言之，f 在 $[a, b]$ 上 Riemann 可積分 $\Rightarrow$ f 在 $[a, b]$ 上有界。

2. (1) 式中的 A 是唯一的，不在話下。

3. 任取 $s_i \in [x_{i-1}, x_i],\ (1) \Rightarrow \forall\, \epsilon > 0,\ \exists\, \delta > 0,$ 使

$$\left|\sum_{i=1}^{n} f(t_i)\Delta x_i - \sum_{i=1}^{n} f(s_i)\Delta x_i\right| < \epsilon,\ \text{當} \|P\| < \delta$$

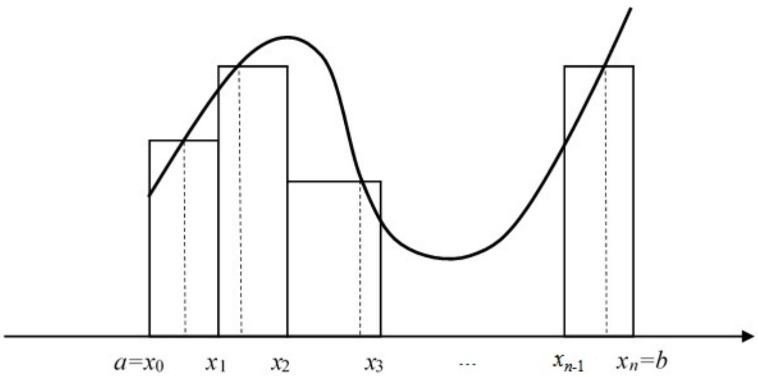


圖 11-1 Riemann Sum

b. Darboux 的觀點

設 f 爲定義於 $[a, b]$ 上的有界實函數。

$P : a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$ 爲 $[a, b]$ 上的一分割，

令 $M_i = \sup\limits_{x_{i-1} \le x \le x_i} f(x),\ m_i = \inf\limits_{x_{i-1} \le x \le x_i} f(x)$，考慮

$U(P, f) = \sum\limits_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i,$ 盈和 (Upper sum)，及

$L(P, f) = \sum\limits_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i,$ 虧和 (Lower sum)，並令

$$\overline{\int_a^b} f(x)dx = \inf_P U(P, f)$$
$$\underline{\int_a^b} f(x)dx = \sup_P L(P, f)$$

分別稱爲 f 在 $[a, b]$ 上的上積分 (Upper Integral) 和下積分 (Lower Integral)

若 $\overline{\int_a^b} f(x)dx = \underline{\int_a^b} f(x)dx$，我們稱 f 在 $[a,b]$ 上 Darboux 可積分，以 $(D)\int_a^b f(x)dx$ 表此共同值，稱爲 f 在 $[a,b]$ 上的 Darboux 積分。

Remark:

1. Riemann(1826～1866)，Darboux(1842～1917)，Riemann 提出他的積分觀點，約在 1854 年，此時實數系的建構還沒誕生，只能這樣處理。Darboux 的觀點約在 1870 年代提出，此時實數系的建構已經完成，實數系具完備性，上面的 M_i, m_i 存在，盈和、虧和可定義。

   處理積分問題，Darboux 的方法比較簡潔，一般採用之，我們第四章中直接稱它爲 Riemann 積分，因爲 $(R)\int_a^b f(x)dx = (D)\int_a^b f(x)dx$，這是我們下面要証明的定理。

2. $P_1 \subset P_2$，則

$$U(P_2, f) \le U(P_1, f)$$
$$L(P_2, f) \ge L(P_1, f)$$

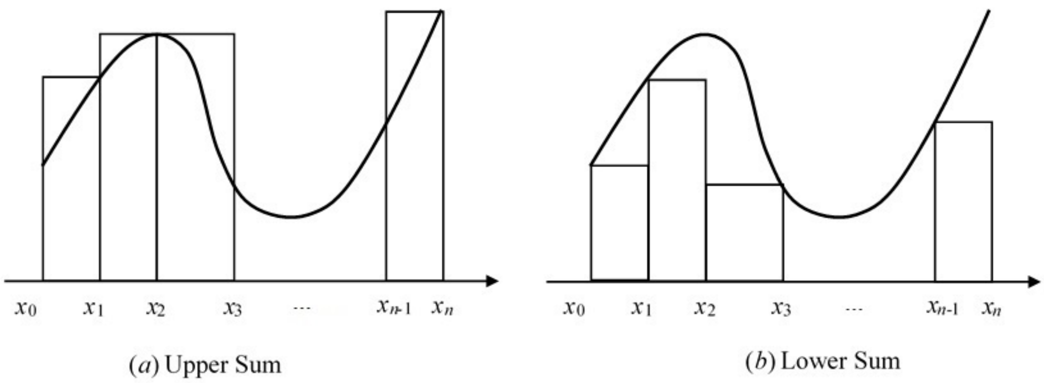


圖 11-2

<u>定理 **11-1**</u> f 在 $[a,b]$ 上 Darboux 可積分 $\Leftrightarrow$ $\forall\, \epsilon > 0,\ \exists\, P,$ 使

$$U(P,f) - L(P,f) < \epsilon$$

這個定理於第四章中証過，因爲簡單而重要，在此再次引述之。

c. Riemann 積分 =Darboux 積分

<u>定理 **11-2**</u> 設 f 爲定義於 $[a,b]$ 上的有界實函數，則 f 在 $[a,b]$ 上 Riemann 可積分 $\Leftrightarrow$ f 在 $[a,b]$ 上 Darboux 可積分，且

$$(R)\int_a^b f(x)dx = (D)\int_a^b f(x)dx$$

在証明這個定理前，我們先引述下面一個引理，其對 $(D) \Rightarrow (R)$ 是個關鍵的論匙。

Lemma 11-1 設 f 爲定義於 $[a,b]$ 上的有界實函數，則 $\forall\, \epsilon > 0,\ \exists\, \delta$ 使

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx - \epsilon < L(P,f),\ U(P,f) < \overline{\int_a^b} f(x)f(x)dx + \epsilon,\ 當\|P\| < \delta$$

分析：

1. 給定 $\epsilon > 0$，欲証 $\exists\, \delta_1 > 0$ 使 $U(P,f) < \overline{\int_a^b} f(x)dx + \epsilon,$ 當$\|P\| < \delta_1$。

2. 依 $\overline{\int_a^b}$ 的定義，$\exists\, P_0$ 使 $U(P_0,f) < \overline{\int_a^b} f(x)dx + \dfrac{\epsilon}{2}$

   令 $P_0 : a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b,\ \lambda = \min \Delta x_i$

   考慮 $\delta_1 < \lambda$，δ_1 待定，

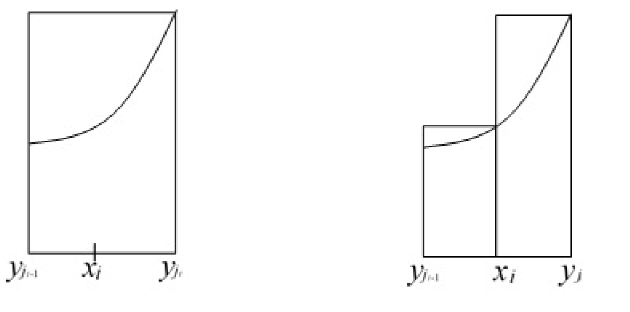
   對 $\|P\| < \delta_1, P : a = y_0 < y_1 < y_2 < \cdots < y_m = b,\ m > n$，令 $P' = P \cup P_0$，則

$$U(P',f) < U(P_0,f) < \int_a^b f(x)dx + \frac{\epsilon}{2}$$

3. $U(P,f) - U(P',f) < \dfrac{\epsilon}{2}$，當 δ_1 夠小，

   理由：設 $x_i \in [y_{j_i-1}, y_{j_i}] = I_{j_i}$，如圖所示

   $U(P,f)$ 和 $U(P',f)$ 在其他非 I_{j_i} 的區間上，其盈和同，而在 I_{j_i} 上，其盈和如圖所示：



(a) $U(P,f)$在 I_{j_i}上　　(b) $U(P',f)$在 I_{j_i}上

設 $|f(x)| < M,\ \forall\ x \in [a,b]$，則

$$U(P,f) - U(P',f) \le \sum_{i=1}^{n} 2M \cdot |\Delta y_{j_i}| < 2nM \cdot \delta_1 < \frac{\epsilon}{2},\ \text{當}\delta_1 < \frac{\epsilon}{4nM}$$

故 $U(P,f) < U(P',f) + \frac{\epsilon}{2} < \int_a^b f(x)dx + \epsilon,\ \text{當}\|P\| < \delta_1$

4. 同理，$\exists\ \delta_2$ 使

$$L(P,f) > \int_a^b f(x)dx - \epsilon,\ \text{當}\|P\| < \delta_2$$

令 $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ 即爲所求。

<u>定理 **11-2**</u> 的証明：

1. $(R) \Rightarrow (D)$

分析：f 在 $[a,b]$ 上 Riemann 可積分，給定 $\epsilon > 0\ \exists\ \delta$, 使

$$|\sum f(t_i)\Delta x_i - \sum f(s_i)\Delta x_i| < \frac{\epsilon}{2},\ \text{當}\|P\| < \delta$$

上式對任意 $t_i, s_i \in [x_{i-1}, x_i]$ 成立。固定 P，於 $[x_{i-1}, x_i]$ 中分別對 t_i 取 sup，對 s_i 取 inf，得

$$|\sum M_i\Delta x_i - \sum m_i\Delta x_i| \le \frac{\epsilon}{2} < \epsilon$$

依定理 10-1，知 f 在 $[a,b]$ 上 Darboux 可積分。

2. $(D) \Rightarrow (R)$

依 Lemma，$\forall\ \epsilon > 0,\ \exists\ \delta$, 使

$$(D)\int_a^b f(x)dx - \epsilon < L(P,f) < \sum f(t_i)\Delta x_i < U(P,f) < (D)\int_a^b f(x)dx + \epsilon,\ \text{當}\|P\| < \delta$$

即

$$\left|\sum f(t_i)\Delta x_i - (D)\int_a^b f(x)dx\right| < \epsilon,\ \text{當}\|P\| < \delta$$

故 $(R)\int_a^b f(x)dx = (D)\int_a^b f(x)dx$

11.2 Riemann 積分的幾個基本性質

<u>定理 **11-3**</u> 設 f, g 在 $[a,b]$ 上 Riemann 可積分，則

(a) $\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx,\ \forall\ k \in \mathbb{R}$

(b) $a < c < b$，則

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

(c) $f+g$ 在 $[a,b]$ 上 Riemann 可積分，且

$$\int_a^b (f+g)(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$

(d) $f(x)g(x)$ 在 $[a,b]$ 上 Riemann 可積分。

以上 (a)(b)(c) 的証明留給同學當習題，在此僅就 (d) 說明之。

分析：

1. 設 $P: a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ 為 $[a,b]$ 上的一分割，$M_i(f\cdot g)$ 與 $M_i(f)$ 及 $M_i(g)$、$m_i(f\cdot g)$ 與 $m_i(f)$ 及 $m_i(g)$ 之間實在看不出有任何必然關係，怎麼辦？

2. 窮則變，變則通，不妨看最簡單的情形：$f=g$，$M_i(f^2)$ 與 $M_i(f)^2$、$m_i(f^2)$ 與 $m_i(f)^2$，有必然的關係嗎？

3. 還是看不出來，不過當 $f(x) > 0\ \forall\ x \in [a,b]$ 時，則有 $M_i(f^2) = M_i(f)^2, m_i(f^2) = m_i(f)^2$，於是

$$\begin{aligned} U(P,f^2) - L(P,f^2) &= \sum [M_i(f^2) - m_i(f^2)]\Delta x_i \\ &= \sum [(M_i(f))^2 - (m_i(f))^2]\Delta x_i \\ &\le 2M \sum [M_i(f) - m_i(f)]\Delta x_i,\ (\text{設}|f(x)| < M,\ \forall\ x \in [a,b]) \\ &= 2M[U(P,f) - L(P,f)] \end{aligned}$$

f 在 $[a,b]$ 上 Riemann 可積分，依定理 10-1，$\forall\ \epsilon > 0,\ \exists\ P$ 使 $U(P,f) - L(P,f) < \dfrac{\epsilon}{2M}$ $\Rightarrow U(P,f^2) - L(P,f^2) < \epsilon$，故 f 在 $[a,b]$ 上 Riemann 可積分 (定理 10-1)

4. 對一般的有界函數 f，$\exists\ k$ 使 $f(x) + k > 0\ \forall\ x \in [a,b]$. 據 3.，$f+k$ Riemann 可積分 $\Rightarrow (f+k)^2$ Riemann 可積分，而 $(f+k)^2 = f^2 + 2kf + k^2$，$(f+k)^2,\ kf,\ k^2$ 皆可積分，故 f^2 可積分。

5. f,g 可積分 $\Rightarrow f+g$ 可積分 $\Rightarrow (f+g)^2$ 可積分，而 $(f+g)^2 = f^2 + 2f\cdot g + g^2$，$(f+g)^2,\ f^2,\ g^2$ 皆可積分，故 $f\cdot g$ 可積分。

<u>定理</u> **11-4** f 在 $[a,b]$ 上 Riemann 可積分，Range of $f \subset [c,d]$，g 在 $[c,d]$ 上連續，則 $g(f(x))$ 在 $[a,b]$ 上 Riemann 可積分。

分析：

1. 先假設 g' 存在，且在 $[c,d]$ 上連續，令 $K = \max\limits_{y\in[c,d]} |g'(y)|$

設 P 為 $[a,b]$ 上一分割，$P: a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$，則

$$\begin{aligned} |\sum [g(f(t_i))\Delta x_i - g(f(s_i))]\Delta x_i| &\le \sum |g'(y_i)[f(t_i) - f(s_i)]|\Delta x_i \\ &\le K \sum |f(t_i) - f(s_i)|\Delta x_i \\ &< K \sum (M_i(f) - m_i(f))\Delta x_i \\ &= K[U(P,f) - L(P,f)] \end{aligned}$$

2. 上式分別於 $[x_{i-1}, x_i]$ 中對 t_i 取 sup，對 s_i 取 inf，得

$$\sum[M_i(g\circ f) - m_i(g\circ f)]\Delta x_i \le K[U(P,f) - L(P,f)]$$

即 $U(P, g\circ f) - L(P, g\circ f) \le K[U(P,f) - L(P,f)]$.

3. f 在 $[a,b]$ 上 Riemann 可積分，給定 $\epsilon > 0$, $\exists\, P$ 使

$$U(P,f) - L(P,f) < \frac{\epsilon}{K}$$

$\Rightarrow U(P, g\circ f) - L(P, g\circ f) < \epsilon$，故 $g\circ f$ 在 $[a,b]$ 上 Riemann 可積分。

4. 對 $g \in C[c,d]$，給定 $\epsilon' > 0$, $\exists\, h \in C^1[c,d]$, 使 $|g(y) - h(y)| < \epsilon'$ (請想一想)

對此 ϵ'，根據 3.，$\exists\, P$ 使 $U(P, h\circ f) - L(P, h\circ f) < \epsilon'$，於是

$$\begin{aligned}
&|\textstyle\sum g(f(t_i))\Delta x_i - \sum g(f(s_i))\Delta x_i| \\
&\le \textstyle\sum |g(f(t_i)) - h(f(t_i))|\Delta x_i + |\sum[h(f(t_i))\Delta x_i - h(f(s_i))\Delta x_i]| + \sum |h(f(s_i)) - h(f(s_i))|\Delta x_i \\
&= (I) + (II) + (III)
\end{aligned}$$

$(I), (III) \le \epsilon' \sum \Delta x_i = \epsilon'(b-a)$
$(II) < U(P, h\circ f) - L(P, h\circ f) < \epsilon'$

故

$$|\sum g(f(t_i))\Delta x_i - \sum g(f(s_i))\Delta x_i| < [2(b-a)+1]\epsilon' < \frac{\epsilon}{2}$$

取 $\epsilon' = \dfrac{\epsilon}{2[2(b-a)+1]}$

5. 上式分別對每個 t_i 取 sup，對 s_i 取 inf，得

$$U(P, g\circ f) - L(P, g\circ f) \le \frac{\epsilon}{2} < \epsilon$$

故 $g\circ f$ 在 $[a,b]$ 上 Riemann 可積分。

系 f 在 $[a,b]$ 上 Riemann 可積分，則 $|f|$ 在 $[a,b]$ 上 Riemann 可積分。

定理 **11-5** f 在 $[a,b]$ 上 Riemann 可積分，

令 $f^+(x) = \begin{cases} f(x) & 若 f(x) > 0 \\ 0 & 若 f(x) \le 0 \end{cases}$，$f^-(x) = \begin{cases} 0 & 若 f(x) > 0 \\ -f(x) & 若 f(x) \le 0 \end{cases}$

則 f^+, f^- 在 $[a,b]$ 上 Riemann 可積分，且

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f^+(x)dx - \int_a^b f^-(x)dx$$

說明：$f^+ = \dfrac{1}{2}(|f|+f), f^- = \dfrac{1}{2}(|f|-f)$，$f$ Riemann 可積分 $\Rightarrow |f|$ Riemann 可積分 $\Rightarrow f^+, f^-$ Riemann 可積分。

又 $f = f^+ - f^-$，故

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f^+(x)dx - \int_a^b f^-(x)dx$$

在第四章中，我們証明了連續函數的可積性，再次陳述如下：

<u>定理</u> 設 f 在 $[a,b]$ 上連續，則 f 在 $[a,b]$ 上 Riemann 可積分。

我們現在要反問：如果 f 在 $[a,b]$ 上 Riemann 可積分，那麼 f 應該是個什麼樣的函數？習題四中我們看到了這個例子：

$$f_1(x) = \begin{cases} 1 & x\text{是有理數} \\ 0 & x\text{是無理數} \end{cases}$$

這個函數 Riemann 不可積分，因爲它實在太糟糕了，處處不連續。

$$f_2(x) = \begin{cases} \sin\dfrac{1}{x} & 0 \le x \le 1 \\ 0 & x \le 0 \end{cases}$$

這個函數 Riemann 可積。注意：它的不連續點只有一個：$x = 0$

$$f_3(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{p} & x\text{爲}[0,1]\text{中有理數}, x = \dfrac{q}{p}, p, q\text{互質} \\ 0 & x\text{爲}[0,1]\text{中無理數} \end{cases}$$

這個函數 Riemann 可積分。注意：f_3 在無理點上連續，在有理點上不連續，f_3 的不連續點是可數集。再看下例：

設 E 表 $[0,1]$ 中的 Cantor set,

$$f_4(x) = \begin{cases} 1 & , x \in E \\ 0 & , x \in [0,1] - E \end{cases}$$

這個函數 Riemann 可積分 (exercise)，注意：E 爲 f 的不連續點集，其測度爲 0。

看來，一個函數在 $[a,b]$ 上 Riemann 可積分，它的不連續點集不能太大，下面這個定理，對 Riemann 可積函數給了一個清楚的描述，在此述而不証，其証明請同學參考任何一本 Real Analysis 的書都必提它。Rudin 的書，第十一章定理 11-33 是個便捷的參考。

<u>定理 **11-6**</u> 設 f 為定義於 $[a,b]$ 上的有界實函數，則 f 在 $[a,b]$ 上 Riemann 可積分 $\Leftrightarrow$ f 在 $[a,b]$ 上迨連續 (continuous almost everywhere)。

所謂的迨連續是指 f 的不連續點集的 Lebesgue 測度為 0。

11.3 瑕積分 (Improper Integral)

Riemann 積分只限定義於 $[a,b]$ 上的有界實函數 f

(a) 如果 f 無界呢？例如 $f = \dfrac{1}{\sqrt{x}}, 0 < x \leq 1$

(b) 如果領域無界呢？例如 $g(x) = e^{-x}, 0 \leq x < \infty$

是否可引進一個概念以定義 f 的積分，

例如 $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}, 0 < x \leq 1$，依 Riemann 積分的概念，$f$ 在 $(0,1]$ 上的 Riemann 積分不存在，但如果我們考慮 f 在 $[\epsilon, 1]$ 上，則

$$\int_\epsilon^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2(1-\sqrt{\epsilon}) \to 2 \text{ 當} \epsilon \to 0$$

因此，我們定義

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \lim_{\epsilon \to 0^+} \int_\epsilon^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2$$

同理，$g(x)$ 在 $[0,\infty)$ 上 Riemann 積分不存在，但如果我們考慮 g 在 $[0,N]$ 上，則

$$\int_0^N e^{-x} dx = 1 - e^{-N} \to 1 \text{ 當} N \to \infty$$

因此，我們定義

$$\int_0^\infty e^{-x} dx = \lim_{N \to \infty} \int_0^N e^{-x} dx = 1$$

這類積分統稱為瑕積分 (Improper Integral)

<u>定義 11-1</u> 設 f 在 $(a,b]$ 上無界，但在 $[a+\epsilon, b]$ 上 Riemann 可積分，若 $\displaystyle\lim_{\epsilon \to 0^+} \int_{a+\epsilon}^b f(x)dx$ 存在，定義

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\epsilon \to 0^+} \int_{a+\epsilon}^b f(x)dx$$

稱為 f 在 $(a,b]$ 上的瑕積分。

<u>定義 11-2</u> 設 f 定義在 $[a,\infty)$ 上，f 在 $[a,b]$ 上 Riemann 可積分 $\forall\, b > a$，若 $\displaystyle\lim_{b \to \infty} \int_a^b f(x)dx$ 存在，定義

$$\int_a^\infty f(x)dx = \lim_{b \to \infty} \int_a^b f(x)dx$$

對於 $[a,b),(-\infty,b]$ 上的函數，可依上述觀念定義其瑕積分。

例 **1.** $f(x)=\dfrac{1}{x^p},\ 0<x\le 1$, 試定 p 值使 f 在 $(0,1]$ 上瑕可積。

解：

(i) $p\neq 1,\ \displaystyle\int_\epsilon^1 x^{-p}dx=\frac{1}{-p+1}x^{-p+1}\Big|_\epsilon^1\rightarrow\begin{cases}\dfrac{1}{1-p} & ,若p<1\\ \infty & ,若p>1\end{cases}$ 當$\epsilon\rightarrow 0$.

(ii) $p=1,\ \displaystyle\int_\epsilon^1 x^{-1}dx=\ \ln x\Big|_\epsilon^1=-\ln\epsilon\rightarrow\infty,$ 當$\epsilon\rightarrow 0$.

故 f 在 $(0,1]$ 上瑕可積 $\Leftrightarrow p<1$.

例 **2.** $f(x)=\dfrac{1}{p},\ 1\le x<\infty$, 試定 p 之值使 f 在 $[1,\infty)$ 上瑕可積

解：

(i) $p\neq 1,\ \displaystyle\int_1^b x^{-p}dx=\frac{1}{-p+1}x^{-p+1}\Big|_1^b\rightarrow\begin{cases}\dfrac{1}{p-1} & 若p>1\\ \infty & 若p<1\end{cases}$ 當$b\rightarrow\infty$

(ii) $p=1,\ \displaystyle\int_1^b x^{-1}dx=\ \ln x\Big|_1^b=\ln b\rightarrow\infty$ 當$b\rightarrow\infty$.

故 f 在 $[1,\infty)$ 上瑕可積 $\Leftrightarrow p>1$.

例 **3.** 試判斷下列二積分是否收斂：
(a) $\displaystyle\int_0^\infty\frac{\sin x}{x}dx$ (b) $\displaystyle\int_0^\infty\left|\frac{\sin x}{x}\right|dx$

分析：

1. 如圖，

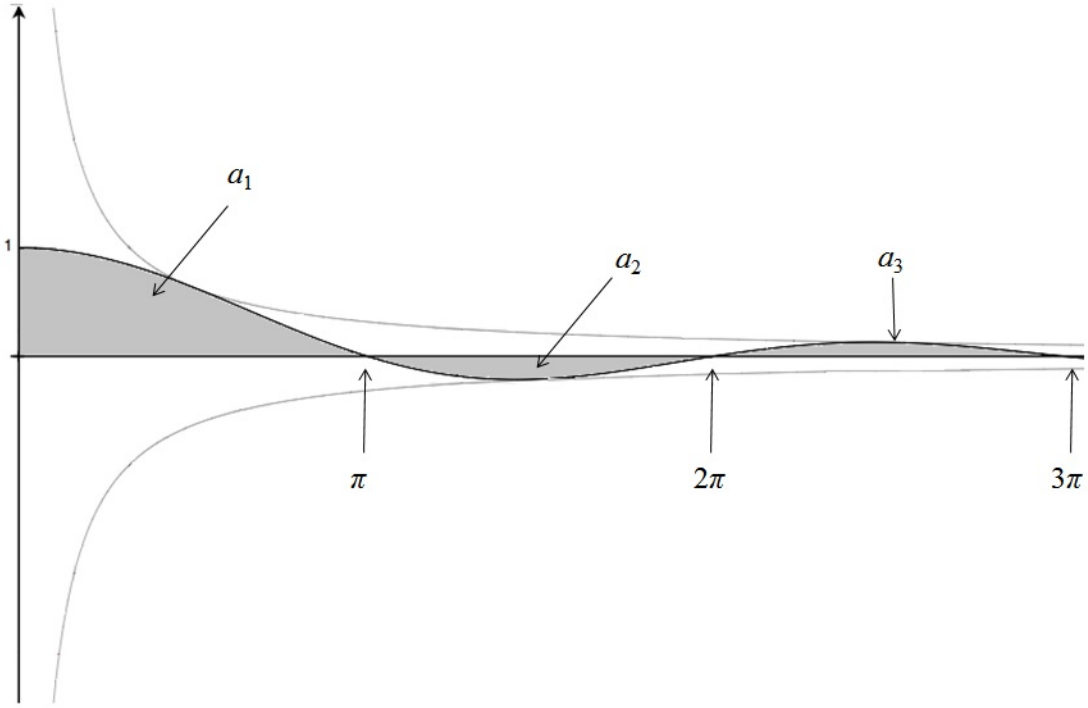


圖 11-4 $y = \dfrac{\sin x}{x}$ 的圖形

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx = a_1 - a_2 + a_3 - \cdots.$$

其中

$$\begin{aligned} a_n &= \left| \int_{(n-1)\pi}^{n\pi} \frac{\sin x}{x} dx \right| = \int_{(n-1)\pi}^{n\pi} \left| \frac{\sin x}{x} \right| dx \\ &\overset{(n>1)}{<} \frac{1}{(n-1)\pi} \int_{(n-1)\pi}^{n\pi} |\sin x| dx \\ &= \frac{2}{(n-1)\pi} \to 0 \text{ 當 } n \to \infty \\ \text{又 } a_n &> \frac{1}{n\pi} \int_{(n-1)\pi}^{n\pi} |\sin x| dx = \frac{2}{n\pi},\ \forall\, n = 1, 2, 3, \cdots \end{aligned}$$

故 $a_{n+1} < \dfrac{2}{n\pi} < a_n$，即：$a_n \searrow 0$ 當$n \to \infty$, 依交錯級數收斂判斷定理知 $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx$ 收斂。

2. $\displaystyle\int_0^\infty \left| \frac{\sin nx}{x} \right| dx = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots > \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n\pi} = \infty$，發散。

Remark: $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx$ 是個有名的瑕積分，收斂歸收斂，其值如何？卻是一個頗具挑戰性的問題。

歷史上有許多不同的方法求其值，其值為 $\dfrac{\pi}{2}$，我們將於第十四章中見到它。

11.4 Riemann 積分的竅門

庖丁解牛，知其筋脈；魯班刨木，識其紋理。凡事都有竅門，聰明的人能看到事物的竅門，直入問題的本質，從而輕易地解決它。

Riemann 積分有什麼竅門嗎？且看下面的分析：

設 f 在 $[a,b]$ 上 Riemann 可積分，P_n 為 $[a,b]$ 上一組分割，$\|P_n\| \to 0$ 當$n \to \infty$，

則 $L(P_n, f) \to \displaystyle\int_a^b f(x)dx$ 當$n \to \infty$.

令 $P_n : a = x_{0,n} < x_{1,n} < x_{2,n} < \cdots < x_{k_n,n},\ I_{j,n} = [x_{j-1,n}, x_{j,n}], m_{j,n} = \inf\{f(x)|x \in I_{j,n}\}$

$$\phi_n(x) = \sum_{j=1}^{k_n} m_{j,n}\chi_{I_{j,n}}(x), \chi_A(x) = \begin{cases} 1 & x \in A \\ 0 & x \notin A \end{cases},\ A \subset \mathbb{R}$$

稱為 A 的特徵函數 (Characteristic function), ϕ_n 為 f 的一個 lower function，則

$$\int_a^b \phi_n(x)dx = L(P_n, f) \to \int_a^b f(x)dx \text{ 當} n \to \infty$$

因此，我們要問 f 是否具有某些性質，只要問 ϕ_n 是否具有此性質，此性質是否可以 pass limit 傳遞到 f 上? 而要問 ϕ_n 使否具有此性質，只要看此性質對 $\chi_I,\ I = [\alpha, \beta]$，成立否即可。我稱它為 Riemann 積分的竅門，許多有關 Riemann 可積函數的特性，可以由此觀察得之。

Remark: 將來你們學 Lebesgue 積分，請記住，Lebesgue 可積函數與 Riemann 可積函數同竅。

定理 **11-7** (Riemann-Lebesgue Lemma)

設 f 在 $[a,b]$ 上 Riemann 可積分，則

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f(x)\sin nx\,dx = 0 \tag{*}$$

分析：

1. (*) 式對 $f = \chi_I, I = [\alpha, \beta]$ 成立否？且看：

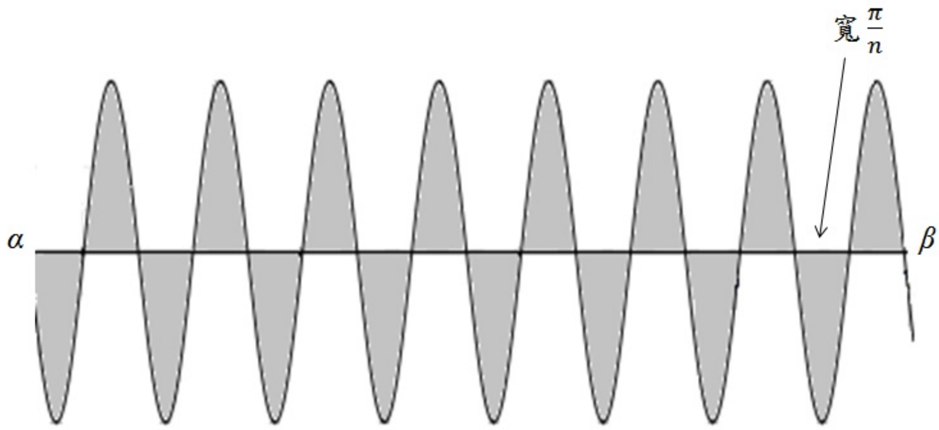


圖 11-5 $\sin nx$ 在 $[\alpha, \beta]$ 上的震盪

$\sin nx$ 是把 $\sin x$ 的週期壓縮 n 倍，它在 $[\alpha, \beta]$ 上正負擺盪，其積分相互抵消，了不起，留下前後三處無人和它抵消，而這三塊的面積和不超過 $3 \cdot \dfrac{\pi}{n}$，於是

$$\left|\int_a^b \chi_I \sin nx\, dx\right| < \frac{3\pi}{n} \to 0 \text{ 當} n \to \infty.$$

2. 據 1., (*) 式對 step function $\varphi(x) = \sum_{j=1}^{m} c_j \chi_{I_j}$ 成立

3. f 在 $[a, b]$ 上 Riemann 可積分，$\forall\ \epsilon > 0,\ \exists$ step function $\varphi,\ \varphi \leq f$，使 $\int_a^b (f(x) - \varphi(x))dx < \epsilon$，於是

$$\begin{aligned}
\left|\int_a^b f(x) \sin nx\, dx\right| &\leq \left|\int_a^b (f(x) - \varphi(x)) \sin nx\, dx\right| + \left|\int_a^b \varphi(x) \sin nx\, dx\right| \\
&\leq \int_a^b (f(x) - \varphi(x))dx + \left|\int_a^b \varphi(x) \sin nx\, dx\right| \\
&< \epsilon + \left|\int_a^b \varphi(x) \sin nx\, dx\right|
\end{aligned}$$

令 $n \to \infty$ 得

$$\limsup_{n\to\infty} \left|\int_a^b f(x) \sin nx\, dx\right| \leq \epsilon$$

ϵ 任意，故

$$\limsup_{n\to\infty} \left|\int_a^b f(x) \sin nx\, dx\right| = 0$$

$\therefore$

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f(x) \sin nx\, dx = 0$$

Remark:

1. (*)$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}\int_a^b f(x)\cos nx\,dx=0$

2. 當 $[a,b]=[0,2\pi]$，$a_0=\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi}f(x)dx,\ a_n=\dfrac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(x)\cos\ nx\,dx,$
   $b_n=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi}f(x)\sin nx\,dx,\ n\geq 1$ 稱爲 f 的 Fourier coefficient.

   Riemann Lebesgue Lemma 的內涵即：可積函數的 Fourier coefficient$\to 0$ 當 $n\to\infty$.

   相應物理上弦的震動，第 n 主波的影響隨 n 而式微。

例 **1.** f 在 $[a,b]$ 上 Riemann 可積分，若 $\displaystyle\int_\alpha^\beta f(x)dx=0\ \forall\ a\leq\alpha<\beta\leq b$，則 $\displaystyle\int_a^b|f(x)|dx=0$（換言之，$f$ 迨爲 0）

分析：

1. $\displaystyle\int_\alpha^\beta f(x)dx=0,\ \forall\ [\alpha,\beta]\subset[a,b]$，則

$$\int_a^b f(x)\varphi(x)dx=0,\ \forall \text{ step function } \varphi$$

2. f 在 $[a,b]$ 上 Riemann 可積分，$\forall\ \epsilon>0,\ \exists$ step function $\varphi\leq f$ 使

$$\int_a^b(f(x)-\varphi(x))dx<\frac{\epsilon}{M},\ M=\sup_{[a,b]}|f(x)|$$

3.

$$\begin{aligned}\int_a^b f^2(x)dx&=\int_a^b f(x)(f(x)-\varphi(x))dx\\&\leq\int_a^b|f(x)|(f(x)-\varphi(x))dx\\&\leq M\cdot\int_a^b(f(x)-\varphi(x))dx<\epsilon\end{aligned}$$

4. ϵ 任意，$\therefore\displaystyle\int_a^b f^2(x)dx=0$，

   而 $\displaystyle\int_a^b|f(x)|dx\leq(b-a)^{\frac{1}{2}}\cdot\left(\int_a^b f^2(x)dx\right)^{\frac{1}{2}}=0$ (Cauchy 不等式)

   得証。

例 **2.** $\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|dx<\infty$，試証：

$$\lim_{h\to 0}\int_{-\infty}^{\infty}|f(x+h)-f(x)|dx=0 \tag{*}$$

分析：

1. $(*)$ 式對 $f=\chi_I, I=[\alpha,\beta]$ 顯然成立，因此 $(*)$ 對任意 step function φ 成立。
2. 給定 $\epsilon>0,\ \exists\ N$ 使
$$\int_{|x|>N}|f(x)|dx<\frac{\epsilon}{4}$$
3. f 在 $[-N,N]$ 上 Riemann 可積分，故對任意 $\epsilon>0,\ \exists$ step function $\varphi\le f$，在 $[-N,N]$ 上，使
$$\int_{|x|\le N}(f(x)-\varphi(x))dx<\frac{\epsilon}{4}$$
4. 令 $\varphi(x)=0$, 當 $x>N$，則
$$\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{\infty}|f(x+h)-f(x)|dx\\
&\le\int_{-\infty}^{\infty}|f(x+h)-\varphi(x+h)|dx+\int_{-\infty}^{\infty}|\varphi(x+h)-\varphi(x)|dx+\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)-\varphi(x)|dx\\
&=2\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)-\varphi(x)|dx+\int_{-\infty}^{\infty}|\varphi(x+h)-\varphi(x)|dx\\
&=2\left[\int_{|x|>N}|f(x)|dx+\int_{|x|\le N}|f(x)-\varphi(x)|dx\right]+\int_{-\infty}^{\infty}|\varphi(x+h)-\varphi(x)|dx\\
&\le 2\left[\frac{\epsilon}{4}+\frac{\epsilon}{4}\right]+\int_{-\infty}^{\infty}|\varphi(x+h)-\varphi(x)|dx
\end{aligned}$$

$\therefore\ \limsup_{h\to 0}\int_{-\infty}^{\infty}|f(x+h)-f(x)|dx\le\epsilon$,
ϵ 任意，$\therefore \limsup_{h\to 0}\int_{-\infty}^{\infty}|f(x+h)-f(x)|dx=0$，
故
$$\lim_{h\to 0}\int_{-\infty}^{\infty}|f(x+h)-f(x)|dx=0$$

Remark:

1. f 在 $[a,b]$ 上 Riemann 可積分，$\forall\ \epsilon>0,\ \exists$ step function $\varphi\le f$ 使
$$\int_a^b(f(x)-\varphi(x))dx<\frac{\epsilon}{2}$$
2. 每一個 step function φ 又可用連續的梯形函數 $g,\ g\le\varphi$, 來逼近 (如圖所示)，使
$$\int_a^b(\varphi(x)-g(x))dx<\frac{\epsilon}{2}$$

3. 故 f 可以用 $g,\ g \leq f$ 來逼近，使

$$\int_a^b (f(x) - g(x))dx < \epsilon$$

4. 令 $L^1(\mathbb{R}) = \left\{ f \,\middle|\, \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|dx < \infty \right\}, C_c(\mathbb{R}) = \{g|g\text{在}\mathbb{R}\text{上連續，在某 compact set 之外爲 } 0\}$，

   則 $C_c(\mathbb{R})$ dense in $L^1(\mathbb{R})$. 這個 $C_c(\mathbb{R})$ 稱爲 The space of continuous functions with compact support in $\mathbb{R}$.

5. 例 2 中可採用 $g \in C_c(\mathbb{R}$ 來逼近，$g = 0$ 當 $x > N$，使

$$\int_{|x| \leq N} (f(x) - g(x))dx < \frac{\epsilon}{4}$$

   g 在 $[-N, N]$ 上連續 $\Rightarrow g$ 在 $[-N, N]$ 上均勻連續 $\Rightarrow \cdots$，得証。(請同學試著完成它)

11.5 Riemann Stieltjes 積分

A. 遞增函數的 Riemann Stieltjes 積分

設 α 在 $[a, b]$ 上遞增，$P : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ 爲 $[a, b]$ 上一分割，令 $\Delta\alpha_i = \alpha(x_i) - \alpha(x_{i-1})$，設 f 爲定義於 $[a, b]$ 上的實函數，

令

$$M_i = \sup_{[x_{i-1}, x_i]} f(x),\ m_i = \lim_{[x_{i-1}, x_i]} f(x),$$
$$U(P, f, \alpha) = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i, L(P, f, \alpha) = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i$$
$$\overline{\int_a^b} f\,d\alpha = \inf_P U(P, f, \alpha), \underline{\int_a^b} f\,d\alpha = \sup_P L(P, f, \alpha)$$

若 $\overline{\int_a^b} f\,d\alpha = \underline{\int_a^b} f\,d\alpha$，我們稱 f 在 $[a, b]$ 上對 α Riemann Stieltjes 可積分，以 $\int_a^b f\,d\alpha$ 表此共同值，稱 f 爲在 $[a, b]$ 上對 α 的 Riemann Stieltjes 積分。

討論：若 $\alpha \in C^1[a, b]$，則 $\Delta\alpha_i = \alpha'(\xi_i)\Delta x_i,\ x_{i-1} < \xi_i < x_i$
仿定理 11-2，Darboux 積分 $\Leftrightarrow$ Riemann 積分的推論，可得

$$\int_a^b f\,d\alpha = \int_a^b f(x)\alpha'(x)dx$$

恕我不欲多言。

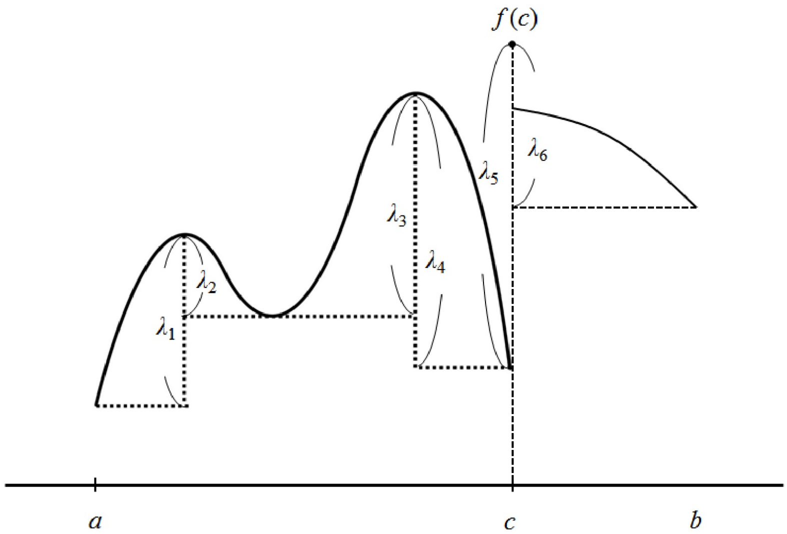
B. 有界變分函數 (Functions of Bounded Variation)

設 f 爲定義於 $[a,b]$ 上的實函數，$P: a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_n=b$ 爲 $[a,b]$ 上的分割，令 $\Delta f_i=f(x_i)-f(x_{i-1}), V_a^b(f)=\sup\limits_P \sum\limits_P |\Delta f_i|$

若 $V_a^b(f)<\infty$，我們稱 f 在 $[a,b]$ 上有界變分 (Bounded Variation)，$V_a^b(f)$ 稱爲 f 在 $[a,b]$ 上的總變分 (Total Variation)，以 $f\in B.V.[a,b]$ 表示 f 在 $[a,b]$ 上爲有界變分。

在這一小節裡我們將把 Riemann Stieltjes 積分推廣到 α 爲有界變分函數。

例 **1.** f 在 $[a,b]$ 上遞增，則 $V_a^b(f)=f(b)-f(a)$
例 **2.** 如圖，$V_a^b(f)=\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+\lambda_4+\lambda_5+\lambda_6$



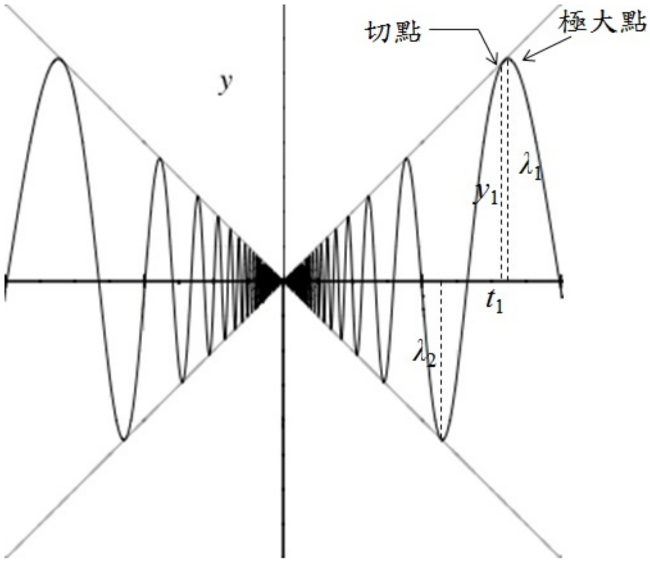
例 **3.** $f(x)=x-[x],\ 0\le x\le n, V_0^n(x)=\underbrace{1+1+\cdots+1}_{n\text{項}}=n$

例 **4.** $f(x)=\dfrac{1}{[x]}, \dfrac{1}{n}\le x\le 1,\ V_{\frac{1}{n}}^1(f)=\underbrace{1+1+\cdots+1}_{n-1\text{項}}=n-1$

(事實上，$f\downarrow$ on $\left[\dfrac{1}{n},1\right], V_{\frac{1}{n}}^1(f)=f\left(\dfrac{1}{n}\right)-f(1)=n-1.$)

例 **5.**

$$f(x)=\begin{cases} x\sin\dfrac{1}{x} & 0\le x\le 1\\ 0 & x=0\end{cases}$$



$\sin\frac{1}{x}=0 \Leftrightarrow x=x_n=\frac{1}{n\pi},\ n=1,2,3\cdot$

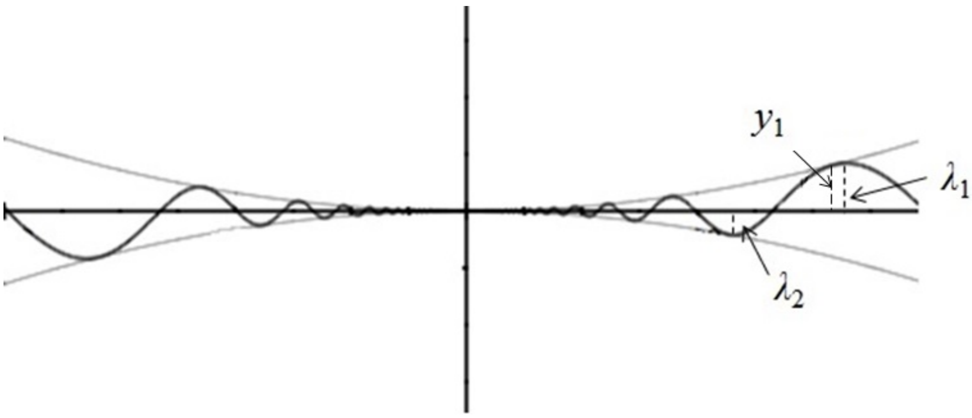
$\left|\sin\frac{1}{x}\right|=1 \Leftrightarrow x=t_n=\frac{1}{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi},\ n=0,1,2,3,\cdots$

設 f 在 $[x_{i-1},x_i]$ 上的極值爲 $\lambda_n, y_n=|f(t_n)|=t_n=\frac{1}{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi}$ 則 $|\lambda_n|>y_n$

$V_0^1(f)=\sum 2|\lambda_n|>2\sum\frac{1}{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi}=\infty$，故 $f\notin B.V.[0,1]$

例 **6.**

$$f(x)=\begin{cases} x^2\sin\frac{1}{x} & 0\le x\le 1\\ 0 & x=0\end{cases}$$



設 f 在 $[x_{i-1},x_i]$ 上的極值爲 λ_n, 令 $y_n=|f(t_n)|=t_n^2=\frac{1}{\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi\right]^2}$

如圖：$|\lambda_2|<y_1$，同理 $|\lambda_{n+1}|<y_n$,

$\sum\limits_{n\ge2}|\lambda_n|<\sum\limits_{n\ge1}\frac{1}{\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi\right]^2}<\infty$，故 f 在 $[0,1]$ 上有界變分。

有界變分函數的幾個性質

1. $f \in B.V.[a,b] \Rightarrow f$ 在 $[a,b]$ 上有界。

   說明：任取 $x \in [a,b]$，則 $\{a,x,b\}$ 為 $[a,b]$ 上之分割，依定義

   $$|f(x)-f(a)|+|f(b)-f(x)| < V_a^b(f)$$

   $\Rightarrow$

   $$2|f(x)| < |f(a)|+|f(b)| < V_a^b(f),\ \forall\, x \in [a,b]$$

   故 f 在 $[a,b]$ 上有界。

2. $f, g \in B.V.[a,b]$，則

   (a) $f+g \in B.V.[a,b]$，且 $V_a^b(f+g) \le V_a^b(f)+V_a^b(g)$

   (b) $kf \in B.V.[a,b]$，且 $V_a^b(kf) = |k|V_a^b(f)$

   (c) $|f| \in B.V.[a,b]$，且 $V_a^b(|f|) \le V_a^b(f)$

   (d) $f\cdot g \in B.V.[a,b]$，且 $V_a^b(f\cdot g) \le M_f V_a^b(g) + M_g V_a^b(f)$, 其中

   $$M_f = \sup_{[a,b]}|f(x)|, M_g = \sup_{[a,b]}|g(x)|$$

   說明：(a)(b)(c) 不在話下，今說明 (d)。

   設 $P: a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$ 為 $[a,b]$ 上的分割，

   $$\begin{aligned}\sum \Delta_i(f\cdot g) &= \sum |f(x_i)g(x_i) - f(x_{i-1})g(x_{i-1})| \\ &\le \sum |f(x_i)|\cdot|g(x_i)-g(x_{i-1})| + \sum |g(x_{i-1})|\cdot|f(x_i)-f(x_{i-1})| \\ &\le M_f \sum |\Delta_i g| + M_g \sum |\Delta_i f| \\ &\le M_f V_a^b(g) + M_g V_a^b(g)\end{aligned}$$

3. $f \in B.V.[a,b]$，Range$(f) \subset [c,d]$, $\varphi \in C^1[c,d] \Rightarrow \varphi\circ f \in B.V.[a,b]$

   說明：$\varphi \in C^1[c,d], P$ 為 $[a,b]$ 上之分割，

   $$\begin{aligned}\sum |\varphi(f(x_i)) - \varphi(f(x_{i-1}))| &= \sum |\varphi'(\xi_i)|\cdot|f(x_i)-f(x_{i-1})| \\ &< M_{\varphi'} \sum |\Delta_i f| \\ &< M_{\varphi'} V_a^b(f) \quad \forall\ P\end{aligned}$$

   其中 ξ_i 介於 $f(x_i), f(x_{i-1})$ 之間，$M_{\varphi'} = \sup\limits_{[c,d]} \varphi'(y)$

   $\Rightarrow V_a^b(\varphi\circ f) \le M_{\varphi'} V_a^b(f)$

   Remark: 於 3. 中，若只要求 $\varphi \in C[c,d]$，結論不成立。

例如：$f(x)=x, 0\le x\le 1$，$\varphi(y)=\begin{cases} y\sin\dfrac{1}{y}, & y\neq 0 \\ 0, & y=0 \end{cases}$

顯然 φ 在 $[0,1]$ 上連續，但 $(\varphi\circ f)(x)=\begin{cases} x\sin\dfrac{1}{x}, & 0\le x\le 1 \\ 0, & x=0 \end{cases}$

$\varphi\circ f\notin B.V.[0,1]$(例 5.)

4. $f\in B.V.[a,b], c\in(a,b)$，則

$$V_a^b(f)=V_a^c(f)+V_c^b(f)$$

說明：

(i) $\forall\ \epsilon>0,\ \exists\ [a,b]$ 上的分割 P 使

$$V_a^b(f)-\epsilon<\sum_P|\Delta_i f|$$

令 $P'=P\cup\{c\}, P_1=P'\cap[a,c], P_2=P'\cap[c,b]$，我們有

(a) $P\subset P'\Rightarrow \sum\limits_P|\Delta_i f|\le\sum\limits_{P'}|\Delta_i f|$

(b) $\sum\limits_{P'}|\Delta_i f|=\sum\limits_{P_1}|\Delta_i f|+\sum\limits_{P_2}|\Delta_i f|$

故

$$V_a^b(f)-\epsilon\le\sum_{P_1}|\Delta_i f|+\sum_{P_2}|\Delta_i f|<V_a^c(f)+V_c^b(f)$$

ϵ 任意，$\therefore$

$$V_a^b(f)\le V_a^c(f)+V_c^b(f)$$

(ii) 給定 $\epsilon>0,\ \exists\ [a,c]$ 上的分割 P_1 使 $V_a^c(f)-\dfrac{\epsilon}{2}<\sum\limits_{P_1}|\Delta_i f|$,

$\exists\ [c,b]$ 上的分割 P_2 使 $V_c^b(f)-\dfrac{\epsilon}{2}<\sum\limits_{P_2}|\Delta_i f|$

令 $P=P_1\cup P_2$，則 P 爲 $[a,b]$ 上的分割，且

$$\sum_P|\Delta_i f|=\sum_{P_1}|\Delta_i f|+\sum_{P_2}|\Delta_i f|$$

故

$$V_a^c(f)+V_c^b(f)-\epsilon\le\sum_P|\Delta_i f|<V_a^b(f)$$

ϵ 任意，$\therefore$

$$V_a^c(f)+V_c^b(f)\le V_a^b(f)$$

上面第 4 點是下面主要定理的依據：

<u>定理 **11-8**</u> (Main Theorem of B.V. functions)

$f\in B.V.[a,b]\Rightarrow\ \exists\ g,h\ \uparrow \text{on}[a,b]$，使 $f=g-h$.

分析：

1. 令 $g(x) = V_a^x(f)$，則 $f \uparrow$ on $[a,b]$
2. 令 $h(x) = g(x) - f(x)$，對 $x_1 < x_2, x_1, x_2 \in [a,b]$，我們有：

$$h(x_2) - h(x_1) = g(x_2) - g(x_1) - [f(x_2) - f(x_1)] = V_{x_1}^{x_2}(f) - [f(x_2) - f(x_1)] \geq 0$$

$\therefore h \uparrow$ on $[a,b]$

3. $f = g - h$，得証。

C. 有界變分函數的 Riemann Stieltjes 積分

設 $\alpha(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界變分，根據定理 11-8，$\alpha(x) = \alpha_1(x) - \alpha_2(x)$，$\alpha_1, \alpha_2 \nearrow$ on $[a,b]$，於是可定義 f 對 α 的 Riemann Stieltjes 積分：

$$\int_a^b f\, d\alpha = \int_a^b f\, d\alpha_1 - \int_a^b f\, d\alpha_2$$

若 $\alpha \in C^1[a,b]$，我們有：

$$\int_a^b f\, d\alpha = \int_a^b f \cdot \alpha' dx$$

Remark: 上述 $\displaystyle\int_a^b f\, d\alpha$ 的定義牽涉到 well-defined 的問題，若對另一組 $\beta_1, \beta_2 \nearrow$ on $[a,b]$，滿足 $\alpha(x) = \beta_1(x) - \beta_2(x)$，依定義

$$\int_a^b f\, d\alpha = \int_a^b f\, d\beta_1 - \int_a^b f\, d\beta_2$$

它們代表同一個值嗎？

這件事情是對的，上課的時間有限，而要講的題材那麼多，請恕我在此打住。志於道的同學，就當作一個習題吧。

11.6 多變數函數的 Riemann 積分

曲面 $z = f(x,y) \geq 0, (x,y) \in \Omega \subset \mathbb{R}^2$，如何求曲面在 Ω 上所圍領域的體積？

Ω 爲空間中一物體，其上一點 (x,y,z) 的密度 $\rho(x,y,z)$ 已知，如何求 Ω 的質量？

這些問題就牽涉到多變數函數的積分。

爲了簡明，以下就以 $\mathbb{R}^2$ 爲例說明之。

A. 定義域爲長方形

設 $K=[a,b]\times[c,d]$，f 爲定義於 K 上的函數

$P_x: a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$ 爲 $[a,b]$ 上一分割，
$P_y: c=y_0<y_1<\cdots<y_n=d$ 爲 $[c,d]$ 上一分割，

則 $P=P_x\times P_y$ 爲 K 上的一分割。

設 $K_{ij}=[x_{i-1},x_i]\times[y_{j-1},y_j]$ 爲第 i,j 塊小長方形，令

$$M_{ij}=\sup_{(x,y)\in K_{ij}} f(x,y), m_{ij}=\inf_{(x,y)\in K_{ij}} f(x,y)$$
$$U(P,f)=\sum M_{ij}\Delta x_i\Delta y_j, L(P,f)=\sum m_{ij}\Delta x_i\Delta y_j$$
$$\overline{\int}_K f(x,y)dxdy=\inf_P U(P,f),$$
$$\underline{\int}_K f(x,y)dxdy=\sup_P L(P,f)$$

若 $\overline{\int}_K f(x,y)dxdy=\underline{\int}_K f(x,y)dxdy$，我們稱 f 在 K 上 Riemann 可積分，

以 $\int_K f(x,y)dxdy$ 表此共同值，稱爲 f 在 K 上的 Riemann 積分。

$\int_K f(x,y)dxdy$ 有時又寫成 $\iint_K f(x,y)dxdy$，表示它是二維的重積分 (Multiple Integral)

B. 定義域非長方形

設 Ω 爲 $\mathbb{R}^2$ 中有界領域，f 爲 Ω 上的有界實函數

a. $f\geq 0$

設 $\Omega\subset[a,b]\times[c,d]=K$, 令 P 爲 K 上一分割，$K=\cup K_{ij}, K_{ij}$ 如前所述

$$\Omega_-=\{K_{ij}|K_{ij}\subset\Omega\},\Omega_+=\{K_{ij}|K_{ij}\cap\Omega\neq\phi\}$$

令 $f=0$，在 $K-\Omega$ 上，根據 1.，f 在 Ω_- 及 Ω_+ 上其積分可定義，

設 f 在 Ω_- 及 Ω_+ 上可積分，$\forall$ P，並令

$$\underline{\int}_\Omega f\,dxdy=\sup_P\int_{\Omega_-} f\,dxdy$$
$$\overline{\int}_\Omega f\,dxdy=\inf_P\int_{\Omega_+} f\,dxdy$$

若 $\underline{\int}_{\Omega} f\,dxdy = \overline{\int}_{\Omega} f\,dxdy$，我們稱 f 在 Ω 上 Riemann 可積分，

以 $\int_{\Omega} f\,dxdy$ 表此共同值，稱爲 f 在 Ω 上的 Riemann 積分。

討論：$\underline{\int}_{\Omega} f = \overline{\int}_{\Omega} f$，暗示 $\partial\Omega$ 不能太複雜，而 f 有界。因此，若 $\partial\Omega$ 可以被有窮個小方塊蓋住，而這些小方塊的面積可以任意小，則 $\int_{\Omega_+} f - \int_{\Omega_-} f$ 可以任意小，故

$$\overline{\int}_{\Omega} f = \underline{\int}_{\Omega} f$$

若它們存在。這樣的領域 Ω 稱爲 Jordan Region.

<u>定義 11-3</u> 稱 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 爲 Jordan region，若對任意 $\epsilon > 0$，恆存在 $\mathbb{R}^n$ 中有窮個長方體 $K_1, K_2, \cdots, K_n$ 使 $\partial\Omega \subset \bigcup_{i=1}^{N} K_i$，且 $\sum_{i=1}^{N} |K_i| < \epsilon$

換言之，

$$\sup_P |\Omega_-(P)| = \inf_P |\Omega_+(P)|$$

即：從 Ω 內部用有窮個小長方塊去逼近，量其體積，與從 Ω 外部用有窮個小長方塊去逼近，量其體積，兩者無異。

Remark:

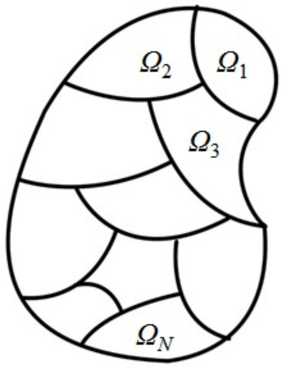
1. 仿 Lemma 11-1 的論述，我們有：

   <u>Lemma 11-2</u> 設 f 爲 Ω 上有界實函數，則給定 $\epsilon > 0$，$\exists\, \delta$ 使

$$\underline{\int}_{\Omega} f\,dxdy - \epsilon \le L(P,f) \le U(P,f) < \overline{\int}_{\Omega} f\,dxdy + \epsilon$$

   當 $\|P\| < \delta$.

2. 設 Ω 爲 Jordan Region，$f \ge 0$ 在 Ω 上，



Ω

將 Ω 任意分割成 $\Omega_1, \Omega_2, \cdots, \Omega_N$，每個 Ω_i 亦爲 Jordan Region.

設此分割爲 Q，令 $M_i = \sup\limits_{\Omega_i} f,\ m_i = \inf\limits_{\Omega_i} f$，
$U(Q, f) = \sum M_i|\Omega_i|,\ L(Q, f) = \sum m_i|\Omega_i|, |\Omega_i|$ 表 Ω_i 的面積，

$$\int^{*}_{\Omega} f\,dxdy = \inf_{Q} U(Q, f)$$
$$\int_{*\,\Omega} f\,dxdy = \sup_{Q} U(Q, f)$$

因長方形分割爲 Jordan 分割的一種，故有

$$\underline{\int}_{\Omega} f\,dxdy \le \int_{*\,\Omega} f\,dxdy \le \int^{*}_{\Omega} f\,dxdy \le \overline{\int}_{\Omega} f\,dxdy$$

因此，以長方形分割處理的積分存在 $\Rightarrow$ 對任意 Jordan 分割處理的積分存在，且兩者相等。

反之，若以任意分割處理的積分存在，即

$$\int_{*\,\Omega} f\,dxdy = \int^{*}_{\Omega} f\,dxdy = (Q)\int_{\Omega} f\,dxdy$$

$(Q)\displaystyle\int_{\Omega} f\,dxdy$ 表任意分割處理的 Riemann 積分。

給定 $\epsilon > 0$, $\exists\, \Omega$ 上的一分割 $Q : \Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \cdots \cup \Omega_N$, Ω_i 爲 Jordan Region, $\forall\ i = 1, 2, \cdots, N$，使

$$\int_{*\,\Omega} f\,dxdy - \frac{\epsilon}{4} < L(Q, f)$$

$\partial\Omega_i$ 可以被有窮個長方形小方塊蓋住，$i = 1, 2, \cdots, N$.

這些小長方塊的面積和可以任意小，又 f 有界，因此，$\exists\, \delta_1 > 0$ 使

$$L(P,f) > L(Q,f) - \frac{\epsilon}{4},\ 當\|P\| < \delta_1$$

P 表長方形分割，代入上式，有

$$\int_{*\ \Omega} f\,dxdy - \frac{\epsilon}{2} < L(P,f),\ 當\|P\| < \delta_1$$

$\Rightarrow$

$$\int_{*\ \Omega} f\,dxdy - \frac{\epsilon}{2} < \underline{\int}_{\Omega} f\,dxdy,\ 當\|P\| < \delta_1$$

同理，$\exists\, \delta_2 > 0$，使

$$\overline{\int}_{\Omega} f\,dxdy \le \int^{*}_{\Omega} f\,dxdy + \frac{\epsilon}{2},\ 當\|P\| < \delta_2$$

因此，若 $(Q)\int_\Omega f\,dxdy$ 存在，則

$$(Q)\int_\Omega f\,dxdy - \frac{\epsilon}{2} \le \underline{\int}_{\Omega} f\,dxdy \le \overline{\int}_{\Omega} f\,dxdy \le (Q)\int_\Omega f\,dxdy + \frac{\epsilon}{2}$$

ϵ 任意，故有

$$\overline{\int}_{\Omega} f\,dxdy = \underline{\int}_{\Omega} f\,dxdy = (Q)\int_\Omega f\,dxdy$$

結論：

<u>定理 **11-9**</u>

$$(P)\int_\Omega f\,dxdy = (Q)\int_\Omega f\,dxdy,\ 若\Omega為\ \text{Jordan Region}$$

(P) 表長方形分割，(Q) 表任意 Jordan 分割。

b. 對一般的函數 f

令

$$f^+(x,y) = \begin{cases} f(x,y), & f(x,y) \ge 0 \\ 0, & f(x,y) < 0 \end{cases}$$

$$f^-(x,y) = \begin{cases} 0, & f(x,y) \ge 0 \\ -f(x,y), & f(x,y) < 0 \end{cases}$$

則 $f = f^+ - f^-$，$f^+, f^- \ge 0$

若 f^+, f^- 在 Ω 上 Riemann 可積，定義

$$\int_\Omega f\,dxdy = \int_\Omega f^+\,dxdy - \int_\Omega f^-\,dxdy$$

稱爲 f 在 Ω 上的 Riemann 積分。

設 Ω 爲 $\mathbb{R}^n$ 上的 Jordan Region，以上對 $\mathbb{R}^2$ 中 Riemann 積分的處理及相關定理，都可推廣到 $\mathbb{R}^n$ 中，了無障礙，這裡不再重複。我們以

$$\int_\Omega f(\mathbf{x})d\mathbf{x}$$

表 f 在 Ω 上的 Riemann 積分，$d\mathbf{x} = dx_1dx_2\cdots dx_n$ 表 $\mathbb{R}^n$ 中直角坐標系的體元。

定理 11-9 再述如下：

<u>定理 **11-10**</u> 設 Ω 爲 $\mathbb{R}^n$ 中 Jordan Region，f 爲 Ω 上有界實函數，則

$$(P)\int_\Omega f(\mathbf{x})d\mathbf{x} = (Q)\int_\Omega f(\mathbf{x})d\mathbf{x}$$

若其中有一個存在，

$(P)\int_\Omega f$ 表採長方體分割相應之 Riemann 積分，
$(Q)\int_\Omega f$ 表任意 Jordan 分割相應之 Riemann 積分。

相應於 Lemma 11-2，對任意分割的 Riemann 積分，我們有：

<u>**Lemma 11-3**</u> f, Ω 如上，$Q: \Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \cdots \cup \Omega_N$ 爲 Ω 上分割，則給定 $\epsilon > 0$, $\exists\,\delta$ 使

$$\int_{*\,\Omega} f\,d\mathbf{x} - \epsilon < L(Q,f) \le U(Q,f) < \int_\Omega^* f\,d\mathbf{x} + \epsilon,\ \text{當}\|Q\| < \delta$$

其中 $\|Q\| = \max_i\{\text{diam}\Omega_i | i = 1, 2, \cdots, N\}$,

$$\int_\Omega^* f\,d\mathbf{x} = \inf_Q U(Q,f),\ \int_{*\,\Omega} f\,d\mathbf{x} = \sup_Q L(Q,f)$$

$\mathbb{R}^n$ 中 **Riemann** 積分的竅門：

根據 Lemma 11-3，若 f 在 Ω 上 Riemann 可積分，則

$$L(Q,f) \to \int_\Omega f\,d\mathbf{x},\ \text{當}\|Q\| \to 0$$

設 $Q:\Omega=\Omega_1\cup\Omega_2\cup\cdots\cup\Omega_N$ 爲 Ω 的分割。

令 $\varphi=\sum m_i\chi_{\Omega_i},\ m_i=\min\limits_{\Omega_i} f$，

則 $\varphi\le f$, 且

$$\int_\Omega \varphi\,d\mathbf{x}=\sum m_i|\Omega_i|=L(Q,f)\to\int_\Omega f\,d\mathbf{x}$$

欲問某性質對 Riemann 可積函數 f 成立否？可分析如下：

(i) 我們可先試 $f=\chi_A$，A 爲長方塊，看它成立否？

(ii) 若 (i) 過關，則問題對 $\varphi=\sum m_i\chi_{A_i}$ 過關。

(iii) 利用 (ii) 及 $\displaystyle\int_\Omega \varphi\,d\mathbf{x}\to\int_\Omega f\,d\mathbf{x}$，看看此性質是否可以 pass 到 f 上。

χ_A, A 爲長方塊是竅門，與 $\mathbb{R}^1$ 中的 Riemann 積分同。

11.7 Fubini 定理

$\mathbb{R}^n$ 上的 Riemann 積分理論上如上述，但實際上要算它的積分值還得借助 $\mathbb{R}^1$ 上的積分，分別對各個變數逐次積分之。$\mathbb{R}^1$ 上有微積分基本定理，化成 $\mathbb{R}^1$ 上的積分才能運轉。這就是下面要介紹的 Fubini 定理。爲了簡明，以下且以 $\mathbb{R}^2$ 爲例說明之。

定理 **11-11** (Fubini 定理)

設 f 爲定義在 $K=[a,b]\times[c,d]$ 上的 Riemann 可積函數，固定 y，$\displaystyle\int_a^b f(x,y)dx$ 存在 $\forall\ y\in[c,d]$；固定 x，$\displaystyle\int_c^d f(x,y)dy$ 存在，$\forall\ x\in[a,b]$

則

$$\int_c^d\left[\int_a^b f(x,y)dx\right]dy,\ \int_a^b\left[\int_c^d f(x,y)dy\right]dx$$

存在且

$$\iint_K f(x,y)dxdy=\int_c^d\left[\int_a^b f(x,y)dx\right]dy=\int_a^b\left[\int_c^d f(x,y)dy\right]dx$$

分析：

1. 令 $\varphi(x)=\displaystyle\int_c^d f(x,y)dy$，欲証：$\varphi$ 在 $[c,d]$ 上可積分，且

$$\iint_K f(x,y)dxdy=\int_a^b\varphi(x)dx.$$

設 P_x,P_y 分別爲 $[a,b]$ 及 $[c,d]$ 上二分割，
$P_x: a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_n=b$

$P_y : c = y_0 < y_1 < y_2 < \cdots < y_m = d$
則 $P = P_x \times P_y$ 爲 K 上之一分割。

令 $K_{ij} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j],\ m_{ij}(x) = \inf_{K_{ij}} f(x,y),\ M_{ij}(x) = \sup_{K_{ij}} f(x,y),$
$n_i = \inf_{[x_{i-1},x_i]} \varphi(x),\ N_i = \sup_{[x_{i-1},x_i]} \varphi(x)$

又固定 $x \in [x_{i-1}, x_i]$，顯然：

$$m_{ij} \leq m_j(x) \leq M_j(x) \leq M_{ij},\ \forall\ x \in [a,b]$$

其中 $m_j(x) = \inf_{y_{j-1}<y<y_j} f(x,y),\ M_j(x) = \sup_{y_{j-1}<y<y_j} f(x,y)$

2. 固定 x，據 1.，我們有

$$\sum_j m_{ij}\Delta y_j \leq \sum_j m_j(x)\Delta y_j \leq \sum_j M_j(x)\Delta y_j \leq \sum_j M_{ij}\Delta y_j$$

而

$$\sum_j m_j(x)\Delta y_j \leq \int_a^b f(x,y)dy = \varphi(x) \leq \sum_j M_j(x)\Delta y_j$$

故

$$\sum_j m_{ij}\Delta y_j \leq \varphi(x) \leq \sum_j M_{ij}\Delta y_j,\ \forall\ x \in [a,b]$$

於是有

$$\sum_j m_{ij}\Delta y_j \leq n_i \leq N_i \leq \sum_j M_{ij}\Delta y_j$$

上式對 $i = 1, 2, \cdots, n$ 成立，從而：

$$\sum_i \left(\sum_j m_{ij}\Delta y_j\right)\Delta x_i \leq \sum_i n_i\Delta x_i \leq \sum_i N_i\Delta x_i \leq \sum_i \left(\sum_j M_{ij}\Delta y_j\right)\Delta x_i$$

即：

$$L(P,f) \leq L(P_x,\varphi) \leq U(P_x,f) \leq U(P,f) \tag{*}$$

3. 而

$$L(P_x,\varphi) \leq \underline{\int_a^b}\varphi(x)dx \leq \overline{\int_a^b}\varphi(x)dx \leq U(P_x,\varphi)$$

代入 $(*)$ 得

$$L(P,f) \leq \underline{\int_a^b}\varphi(x)dx \leq \overline{\int_a^b}\varphi(x)dx < U(P,f),\ \forall\ P$$

$\Rightarrow$

$$\underline{\iint_K} f(x,y)dxdy \leq \underline{\int_a^b}\varphi(x)dx \leq \overline{\int_a^b}\varphi(x)dx \leq \overline{\iint_K} f(x,y)dxdy$$

f 在 K 上 Riemann 可積分，$\underline{\iint}_K f = \overline{\iint}_K f = \iint_K f$，故有

$$\underline{\int}_a^b \varphi(x)dx = \overline{\int}_a^b \varphi(x) = \iint_K f(x,y)dxdy$$

即：

$$\int_a^b \varphi(x)dx = \iint_K f(x,y)dxdy$$

4. 同理，

$$\int_c^d \left[\int_a^b f(x,y)dx\right] dy = \iint_K f(x,y)dxdy$$

Remark:

1. 定理 11-11 的證明，可利用微分與積分的對調來處理，更爲簡潔，我們將於第十三張中介紹之。

2. 在處理重積分問題時常會碰到領域非 compact 或函數非 bounded 的情形，這就牽涉到 $\mathbb{R}^n$ 中的瑕積分 (Improper Integral) 了。對瑕積分，Fubini 還成立嗎？這些問題幾乎可透過 Lebesgue 積分的 Fubini 定理來處理。Riemann 積分要求 f 是 bounded、Domain 是 bounded. Lebesgue 積分不做這些要求，因此，$\mathbb{R}^n$ 中的瑕積分的 Fibini 定理幾乎都可用 Lebesgue 積分的 Fubini 定理來了解。

對 Bounded function on compact domain 而言，Riemann 可積 $\Rightarrow$Lebesgue 可積且其積分值相等。換言之，Lebesgue 積分爲 Riemann 積分的推廣。因此，我不想花篇幅去談 $\mathbb{R}^n$ 中瑕積分的 Fubini 定理，僅在此引述 Lebesgue 積分的 Fubini 定理以供參考。

定理 **11-12** (Lebesgue 積分的 Fubini 定理)

設 $A, B \subset \mathbb{R}$ 爲 Lebesgue 可測集，f 在 $A \times B$ 上 Lebesgue 可積分 (f 可以是 unbounded!)

令 $I = \iint_{A\times B} f(x,y)dxdy, I_{xy} = \int_B \left(\int_A f(x,y)dx\right) dy, I_{yx} = \int_A \left(\int_B f(x,y)dy\right) dx$

則 I_{xy}, I_{yx} 存在，且 $I = I_{xy} = I_{yx}$。

定理中的 A, B 可以是 $[0,\infty), (-\infty,0], (-\infty,\infty), (0,1], [0,1), \cdots$

Remark:

1. Fubini 定理的應用，首先必須檢驗 f 是否爲可積函數。通常，對 f 的檢驗較不容易，而 $f = f^+ - f^-$，f 可積分 $\Leftrightarrow f^+, f^-$ 可積分，故 $|f|$ 可積分。

反之，若 $|f|$ 可積分，$|f| = f^+ + f^-, 0 \le f^+ \le |f| \Rightarrow f^+$ 可積分 (Lebesgue 可積)，同理 f^- 可積 $\Rightarrow f = f^+ - f^-$ 可積。

即：f Lebesgue 可積分 $\Rightarrow |f|$ Lebesgue 可積分

故我們通常檢測 $\iint_{A\times B} |f|$ 是否 $< \infty$，據以判斷 f 是否可積。

有關 Lebesgue 積分相關內容，同學可參考 Rudin 課本第 11 章: The Lebesgue Theory 或 Royden 的 Real Analysis 一書。

2. 怪哉，f 可積 $\Leftrightarrow |f|$ 可積，這在 Riemann 積分中是不可思議的！

例如：$f(x,y) = \begin{cases} 1, & x,y\text{爲有理數} \\ -1 & \text{其他} \end{cases}$, $(x,y) \in [0,1]\times[0,1]$

$|f(x,y)| = 1,\ \forall\ (x,y) \in [0,1]\times[0,1]$

因此，$|f|$ 在 $[0,1]\times[0,1]$ 上 Lebesgue 可積，但 f 並非 Riemann 可積！

爲什麼會這樣呢？

因爲，Riemann 積分是在 Domain 做分割，Lebesgue 積分是在 Range 上做分割。

有理點雖在 $[0,1]\times[0,1]$ 上稠密，可是它的測度爲 0，對 Lebesgue 積分不起作用。

上例，以 Lebesgue 積分的觀點，可作如下了解：

有一賭局，在 $[0,1]\times[0,1]$ 上均勻地任扎一針，扎中有理點集 $A = \{(x,y)|x,y\text{爲有理數}\}$ 得一元，扎中非有理點集 $B = [0,1]\times[0,1] - A$ 需付一元，此賭局公平否？

Lebesgue 說：得一元的機率 $m(A) = 0$ (Lebesgue 測度)，輸一元的機率 $m(B) = 1$(同上)，

因此，期望值 (Lebesgue 積分)$= 1\cdot 0 + (-1)\times 1 = -1$

依大數法則，賭 n 次所得 S_n，有如下定則：

$$\frac{S_n}{n} \to -1 \text{ with probability } 1$$

不可賭！不可賭！！即使射中 A 給你千億元，也是不公平的賭局。不過斷頭的勾當都有人幹，那千億元也實在太吸引人了，不怕匹夫匹婦不來下注。

對 Lebesgue 來說，f 是可積函數，$\iint f(x,y)dxdy = -1$

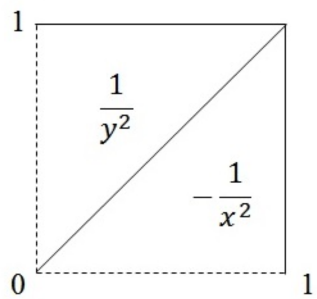
3. 於 $\mathbb{R}^1$ 中，Riemann 瑕積分和 Lebesgue 對 unbounded domain 或 range 的積分概念並不相同，Riemann 瑕積分存在並不保証 Lebesgue 可積，且看下例：

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x}, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

我們知道它的 Riemann 瑕積分 $\displaystyle\int_0^\infty f(x)dx$ 是存在的，但 $\displaystyle\int_0^\infty |f(x)|dx = \infty$，因此它的 Lebesgue 積分並不存在。

對於 $\mathbb{R}^n (n > 1)$ 中 Riemann 瑕積分的定義，同學可參考 J Cooper 所著 Working Analysis, Elsevier 2005, P.536∼545，那裏有詳細的介紹，它是對 $|f|$ 的收斂行爲做規範，因此和 Lebesgue 積分的存在無異。同學可直接用 Lebesgue 積分的 Fubini 定理來處理，了無障礙。

例 **1.** $f(x,y) = \begin{cases} -\frac{1}{x^2}, & 0 < y \le x \le 1 \\ \frac{1}{y^2}, & 0 < x \le y \le 1 \end{cases}$



固定 y，我們有

$$\int_0^1 f(x,y)dx = \int_0^y \frac{1}{y^2}dx + \int_y^1 -\frac{1}{x^2}dx = \frac{1}{y} + \left(1 - \frac{1}{y}\right) = 1$$

$\therefore$

$$I_{xy} = \int_0^1 \left[\int_0^1 f(x,y)dx\right] dy = 1$$

又 $f(x,y) = -f(y,x)$，故

$$I_{yx} = \int_0^1 \left[\int_0^1 f(x,y)dy\right] dx = -1$$

$I_{xy} \neq I_{yx}$

注意：f 在 $[0,1]\times[0,1]$ 上並非有界函數，因此牽涉到的是瑕積分，借用 Lebesgue 積分來看它：

$$\iint f^+(x,y)dxdy = \int_0^1 \left[\int_0^y \frac{1}{y^2}\right] dy = \int_0^1 \frac{1}{y} dy = \infty$$

同理 $\displaystyle\iint f^-(x,y)dxdy = \infty$

f 在 $(0,1]\times(0,1]$ 上是 Lebesgue 不可積！

例 **2.** $A = [-1,1]\times[-1,1]$,

$$f(x,y) = \frac{xy}{(x^2+y^2)^2},\ (x,y)\neq(0,0),\ f(0,0)=0$$

觀察：

1. $\displaystyle\int_{-1}^1 f(x,y)dx = \int_{-1}^1 f(x,y)dy = 0$，因此

$$\int_{-1}^1 \left[\int_{-1}^1 f(x,y)dx\right] dy = \int_{-1}^1 \left[\int_{-1}^1 f(x,y)dy\right] dx = 0$$

2. 令 $B = \{(x,y)|x^2+y^2<1\}$，則 $B \subset A$

$$\iint_A |f(x,y)|dxdy > \iint_B |f(x,y)|dxdy = \int_0^1 \left[\int_0^{2\pi} \frac{|\sin\theta\cos\theta|}{r} d\theta\right] dr = 2\int_0^1 \frac{1}{r} dr = \infty$$

雖然 $I_{xy} = I_{yx}$ 也無濟於事，$I \neq I_{xy}$.

對非方領域，我們有如下定理。

<u>定理 **11-13**</u> 設 $\Omega = \{(x,y)|a\le x\le b, y_1(x)\le y\le y_2(x)\}, y_1, y_2$ 在 $[a,b]$ 上連續，f 在 Ω 上可積分，則

$$\iint_\Omega f(x,y)dxdy = \int_a^b \left[\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy\right] dx$$

說明：

1. 取 $K = [a,b]\times[c,d] \supset \Omega$，令 $F(x,y) = \begin{cases} f(x,y), & (x,y)\in\Omega \\ 0, & f(x,y)\in K-\Omega \end{cases}$

   則 F 在 K 上可積分。

2. 於 K 上對 F Fubini，即得定理。

高維度的 Fubini 定理敘述如下：

定理 **11-14** $\mathbf{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_m), \mathbf{y}=(y_1,y_2,\cdots,y_n), d\mathbf{x}=dx_1dx_2\cdots dx_n, d\mathbf{y}=dy_1dy_2\cdots dy_n$

$A\subset\mathbb{R}^m, B\subset\mathbb{R}^m$ 爲可測集，f 爲 $A\times B$ 上的可積函數，則

$$\int_{A\times B} f(\mathbf{x},\mathbf{y})d\mathbf{x}d\mathbf{y}=\int_B\left[\int_A f(\mathbf{x},\mathbf{y})d\mathbf{x}\right]d\mathbf{y}=\int_A\left[\int_B f(\mathbf{x},\mathbf{y})d\mathbf{y}\right]d\mathbf{x}$$

11.8 弧長公式 (Arc length)

設 $\Gamma:(x(t),y(t)), a\le t\le b, x,y\in C^1[a,b]$，爲平面上一平滑曲線，欲求 Γ 的弧長。

a. 物理觀點

想像 $(x(t),y(t))$ 表質點運動的軌跡，則 $\mathbf{v}(t)=(x'(t),y'(t))$ 表 t 時刻的速度，$v(t)=|\mathbf{v}(t)|=\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}$ 表 t 時刻的速率，故質點在 $[a,b]$ 區間所行距離

$$|\Gamma|=\int_a^b\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}dt$$

b. 數學上的定義

設 $P:a=t_0<t_1<t_2<\cdots<t_n=b$ 爲 $[a,b]$ 上一分割，
$A_i=(x(t_i),y(t_i)), i=1,2,\cdots,n$ 爲 Γ 上相應點。

令 $L(P)=\sum\limits_{i=1}^n\overline{A_{i-1}A_i}=\sum\limits_{i=1}^n\sqrt{[x(t_i)-x(t_{i-1})]^2+[y(t_i)-y(t_{i-1}]^2}$,
$|\Gamma|=\sup\limits_P L(P)$ 稱爲 Γ 的弧長。

弧長公式：

(i) 函數型

$\Gamma:(x,f(x)), a\le x\le b$，則

$$\begin{aligned}L(P)&=\sum_{i=1}^n\sqrt{(x_i-x_{i-1})^2+[f(x_i)-f(x_{i-1})]^2}\\&=\sum_{i=1}^\infty\sqrt{1+f'^2(\xi_i)}\Delta x_i,\ \xi_i\in(x_{i-1},x_i)\end{aligned}$$

上式爲 $\sqrt{1+f'^2(x)}$ 在 $[a,b]$ 上對 P 的 Riemann Sum，故

$$|\Gamma|=\int_a^b\sqrt{1+f'^2(x)}dx$$

(ii) 參數型

根據均值定理 A

$$L(P)=\sum_{i=1}^{n}\sqrt{x'^2(\xi_i)+y'^2(\eta_i)}\Delta t_i,\ \xi_i,\eta_i\in(t_{i-1},t_i)$$

注意上式，ξ_i 未必等於 η_i，故 $L(P)$ 非 $g(t)=\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}$ 的 Riemann Sum，不過公式是對的，怎麼說清楚，講明白呢？

根據不等式：

$$||\vec{a}|-|\vec{b}||\le|\vec{a}-\vec{b}|$$

對一切 $\mathbb{R}^n$ 中的向量 $\vec{a},\vec{b}$ 成立。

令 $\vec{a}=(x'(\xi),y'(\eta)),\vec{b}=(x'(\xi),y'(\xi))$，則

$$|\sqrt{x'^2(\xi)+y'^2(\eta)}-\sqrt{x'^2(\xi)+y'^2(\xi)}|\le|y'(\xi)-y'(\eta)|$$

y' 在 $[a,b]$ 上連續 $\Rightarrow$ y' 在 $[a,b]$ 上均勻連續。

給定 $\epsilon>0,\exists\ \delta_1$，使 $|y'(s)-y'(t)|<\dfrac{\epsilon}{b-a}$ 當 $|s-t|<\delta_1$

故當 $\|P\|<\delta_1\Rightarrow|\xi-\eta|<\delta_1$

$\Rightarrow$

$$|\sqrt{x'^2(\xi)+y'^2(\eta)}-\sqrt{x'^2(\xi)+y'^2(\xi)}|<\frac{\epsilon}{b-a}$$

$\Rightarrow$

$$\left|\sum_{i=1}^{n}\sqrt{x'^2(\xi_i)+y'^2(\eta_i)}\Delta t_i-\sum_{i=1}^{n}\sqrt{x'^2(\xi_i)+y'^2(\xi_i)}\Delta t_i\right|<\epsilon$$

其中 $\sum\limits_{i=1}^{n}\sqrt{x'^2(\xi_i)+y'^2(\xi_i)}\Delta t_i$ 爲 $\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}$的 Riemann Sum。

又 $\exists\ \delta_2$ 使 $\|P\|<\delta_2\Rightarrow$

$$\left|\sum_{i=1}^{n}\sqrt{x'^2(\xi_i)+y'^2(\xi_i)}\Delta t_i-\int_a^b\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}dt\right|<\epsilon$$

取 $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$，則

$$\left|\sum_{i=1}^{n}\sqrt{x'^2(\xi_i)+y'^2(\eta_i)}\Delta t-\int_a^b\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}dt\right|<2\epsilon,\ 當\|P\|<\delta$$

$\Rightarrow$

$$\left||\Gamma|-\int_a^b\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}dt\right|<2\epsilon$$

ϵ 任意 $\Rightarrow |\Gamma| = \int_a^b \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}dt$

同理：$\Gamma : \mathbf{x}(t) = (x_1(t), x_2(t), \cdots, x_n(t)), a \leq t \leq b$ 表 $\mathbb{R}^n$ 中一平滑曲線，則

$$|\Gamma| = \int_a^b |\mathbf{x}'(t)|dt$$

11.9 線積分 (Line integral)

a. 直線上的線元

於 $[a, b]$ 間築籬，點 x 上籬高 $f(x)$，則籬笆面積 $A = \int_a^b f(x)dx$

dx 表 x 軸上的線元，$f(x) \cdot dx$ 表 dx 線段上的籬笆面積。

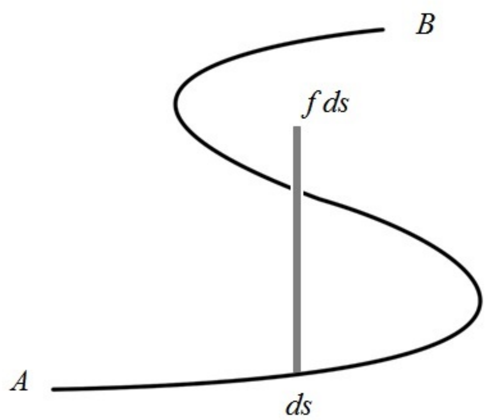
b. 曲線上的線元

設 $\Gamma : (x(t), y(t)), a \leq t \leq b$ 表平面上一平滑曲線，令 $ds = \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}dt$ 稱爲曲線 Γ 上的線元。

今在 Γ 上築籬，點 $(x(t), y(t))$ 上籬高 $f(t)$，則 Γ 上籬笆面積：

$$A = \int_\Gamma f\, ds = \int_a^b f(t)\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}dt$$

稱爲 f 在 Γ 上的線積分。



這個線積分可以如下理解：ds 表 Γ 上的線元，$f\ ds$ 表 ds 上的籬笆面積，這些小小的面積加起來求極限就是 $\int_\Gamma f\, ds$

c. 功

設 $\overrightarrow{F}(x,y)=(P(x,y),Q(x,y))$ 表平面上的力場，$\Gamma:(x(t),y(t)),a\le t\le b$ 表平面上一平滑曲線，$A=(x(a),y(a)),B=(x(b),y(b))$

$\overrightarrow{T}(t)=(x'(t),y'(t))/\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}$ 表 Γ 上的單位切向量，

則 $\overrightarrow{F}$ 將單位質量沿 Γ 自 A 至 B 所作功

$$W=\int_\Gamma \overrightarrow{F}\cdot\overrightarrow{T}ds$$

$ds=\sqrt{x'^2+y'^2}dt$，故 $\overrightarrow{T}ds=(x'(t),y'(t))dt=(dx,dy)$

$\Rightarrow \overrightarrow{F}\cdot\overrightarrow{T}ds=Pdx+Qdy$

$\therefore$

$$W=\int_\Gamma Pdx+Qdy=\int_\Gamma[P(x(t),y(t))x'(t)+Q(x(t),y(t))y'(t)]dt$$

Remark: 以上所談線積分，曲線 Γ 至少必須是片段平滑，否則 $ds=\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}$ 將失所依靠。

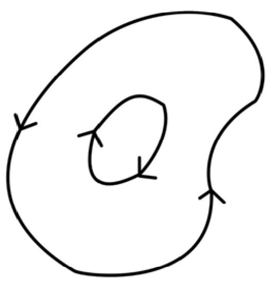
$W=\displaystyle\int_\Gamma Pdx+Qdy$ 中，P,Q 連續以確保積分存在。

d. Green's 定理

<u>定理 **11-15**</u> 設 Ω 爲 $\mathbb{R}^2$ 中封閉領域，$\partial\Omega$ 爲片段平滑 (piecewise smooth)，$P,Q\in C^1(\Omega)$，則

$$\int_{\partial\Omega}Pdx+Qdy=\iint_\Omega(Q_x-P_y)dxdy$$

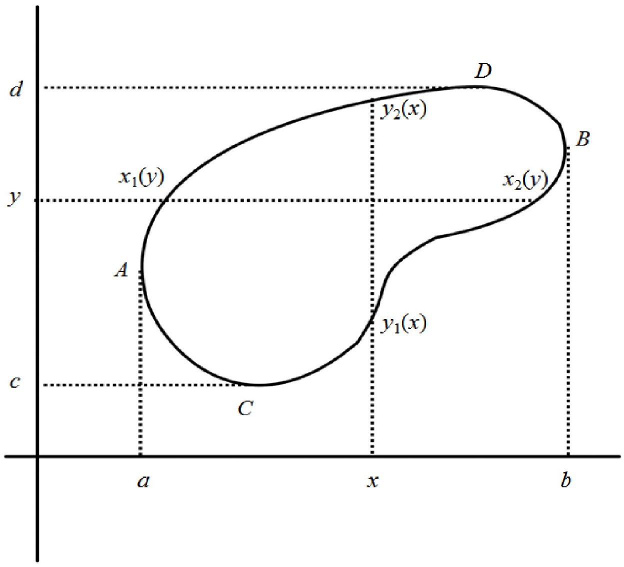
Remark: 上式左邊線積分規定爲逆時向積分，所謂逆時向只是簡略說法，更精確地描述應該是：想像 Ω 爲一島嶼，一人沿水而行，陸地恆在人之左側，人行方向即爲積分方向，因此人沿海岸而行走的是逆時向，若島中有湖，人沿湖而行，則走的是順時向。



Ω

分析：

1. 不妨先考慮 Ω 爲單連通集 (simply connected)(即，Ω 內任意簡單封閉曲線，恆可在 Ω 內連續地縮成一點)，且 $\partial\Omega$ 可以分別對 x 軸及 y 軸，表成上下兩函數，如圖所示：



如圖：$\partial\Omega$ 對 x 軸有上下二函數 $y_2(x), y_1(x), a \le x \le b$
對 y 軸有左右二函數 $x_1(y), x_2(y), c \le y \le d$

2. 觀察：

$$\begin{aligned}\iint_{\Omega} Q_x\,dxdy &= \int_c^d \left[\int_{x_1(y)}^{x_2(y)} Q_x\,dx\right] dy\\ &= \int_c^d Q(y, x_2(y))dy - \int_c^d Q(y, x_1(y))dy\\ &= \int_c^d Q(y, x_2(y))dy + \int_d^c Q(y, x_1(y))dy\\ &= \int_{\partial\Omega} Q\,dy\end{aligned}$$

同理

$$\iint_{\Omega} -P_y\,dxdy = \int_{\partial\Omega} Pdx$$

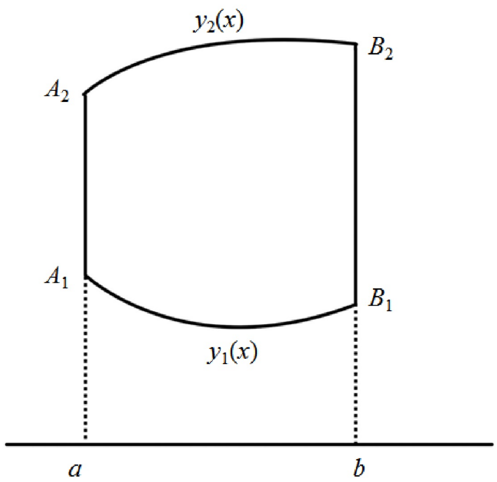
$\therefore$ 定理成立。

3. 若 $\partial\Omega$ 含鉛直線段

如圖，在 $\overline{A_2A_1}$ 及 $\overline{B_1B_2}$ 上 $dx=0$

$$
\begin{aligned}
\iint_\Omega -P_y\,dxdy &= \int_a^b \left[\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} -P_y\,dy\right] dx \\
&= \int_a^b (P(x,y_1(x))dx + \int_b^a P(x,y_2(x))dx \\
&= \int_a^b P(x,y_1(x))dx + \int_{B_1}^{B_2} P\,dx + \int_b^a P(x,y_2(x))dx + \int_{A_2}^{A_1} P\,dx \\
&= \int_{\partial\Omega} P\,dx
\end{aligned}
$$

故定理成立。



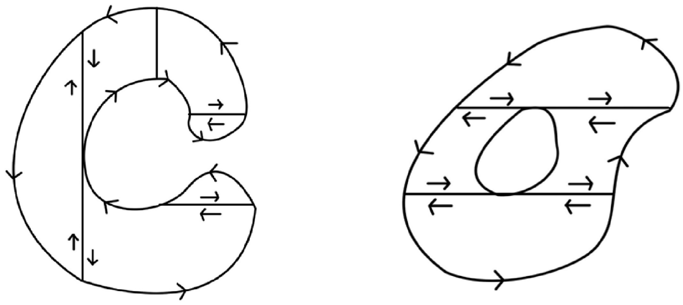
4. 同理，若 $\partial\Omega$ 含水平線段，

$$
\iint_\Omega Q_x\,dxdy = \int_{\partial\Omega} Q\,dy
$$

亦成立，故定理成立。

5. 對一般領域 Ω，恆可用鉛直或水平線段把 Ω 分割成有窮領域 $\Omega_1,\Omega_2,\cdots,\Omega_n$, $\bigcup\limits_{i=1}^{n}\Omega_i=\Omega$，每一個 Ω_i 滿足上述 Ω 的性質 (如圖 (a),(b))，於是：

$$
\begin{aligned}
\iint_\Omega (Q_x-P_y)dxdy &= \sum \iint_{\Omega_i} (Q_x-P_y)dxdy \\
&= \sum \int_{\partial\Omega_i} Pdx+Qdy \\
&= \int_{\partial\Omega} Pdx+Qdy \ (\partial\Omega_i\text{在}\Omega\text{內部的線積分相互抵消})
\end{aligned}
$$



(a) (b) Ω中空
外圈逆時，內圈順時

系 $\Omega \subset \mathbb{R}^2,\ \partial\Omega$ piecewise smooth，則

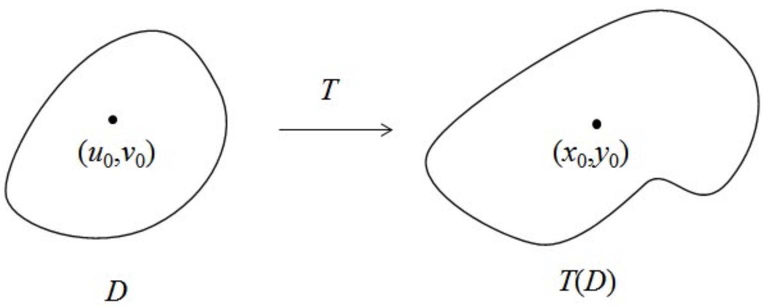
$$|\Omega| = \frac{1}{2}\int_{\partial\Omega} x\,dy - y\,dx,\ |\Omega|\text{表}\Omega\text{的面積}$$

11.10 坐標變換

a. 面元間的放大率

設 $\mathbf{T} : (u, v) \to (x, y)$ 表從 u，v 平面到 x，y 平面上的座標變換，
$x = x(u, v), y = y(u, v) \in C^1, \mathbf{T} : (u_0, v_0) \to (x_0, y_0)$

在 (u_0, v_0) 附近任取一適當領域 D，∂D piecewise smooth，則 $(x_0, y_0) \in \mathbf{T}(D)$



設 ∂D 可表爲參數式 $(u(t), v(t)), a \leq t \leq b$

依 Green's 定理：

$$
\begin{aligned}
|\mathbf{T}(D)| &= \frac{1}{2}\int_{\partial \mathbf{T}(D)} x\,dy - y\,dx \quad (\text{逆時向積分，在}x,y\text{平面上}) \\
&= \frac{1}{2}\int_a^b x(u(t),v(t))dy(u(t),v(t)) - y(u(t),v(t)dx(u(t),v(t)) \\
&= \frac{1}{2}\int_a^b [x(y_u\cdot u' + y_v\cdot v') - y(x_u\cdot u' + x_v\cdot v')]dt \qquad (2) \\
&= \pm\frac{1}{2}\int_{\partial D} (xy_u - yx_u)du + (xy_v - yx_v)dv \ (\text{拉到}u,v\text{平面上積分}) \qquad (3) \\
&= \pm\int_{\partial D} Pdu + Qdv \\
&= \pm\iint_D (Q_u - P_v)dudv
\end{aligned}
$$

(3) 式中 $\int_{\partial D}\cdots$，依規定，指逆時向線積分 (在 u,v 平面)，

但由 (2) 進入 (3) 所相應於 u,v 平面上的線積分未必爲逆時向，放上正負號以調整之，使等式成立。逆取正，順取負。

其中 $P = xy_u - yx_u,\ Q = xy_v - yx_v$，經簡單計算，

$$Q_u - P_v = 2(x_uy_v - x_vy_u)$$

設 $x_uy_v - y_ux_v \neq 0$，在 D 上，$x,y\in C^1(D)$

$\Rightarrow x_uy_v - y_ux_v$ 在 D 上恆正或恆負，故

$$|\mathbf{T}(D)| = \iint_D |x_uy_v - x_vy_u|dudv \qquad (4)$$

於是：

$$\lim_{D\to(u_0,v_0)} \frac{|\mathbf{T}(D)|}{|D|} = |x_uy_v - x_vy_u|_{(u_0,v_0)} = \left\| \begin{matrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{matrix} \right\|_{(u_0,v_0)} \qquad (5)$$

<u>定義 11-4</u> $J_{\mathbf{T}}(u,v) = \left| \begin{matrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{matrix} \right|_{(u,v)}$ 稱爲此座標變換下的 Jacobian，有時以 $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$ 表示之。

由 (4) 式，可看出 $|J_{\mathbf{T}}(u,v)|$ 即表示此座標變換下，面元間在 (u,v) 點的放大率，簡記作：$dxdy = \left|\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|dudv$

b. 二變數函數座標變換下的積分公式

(i) 回憶單變數函數的變數變換

$I=\int_a^b f(x)dx$，指在 x 軸上的積分，今變換變數，$x=x(t),\alpha\le t\le\beta$，則

$$I=\int_c^d f(x(t))x'(t)dt$$

為在 t 軸上的積分，其中 $x'(t)=\lim_{\Delta t\to 0}\dfrac{\Delta x}{\Delta t}$ 表線元間的放大率。

(ii) 設 $\Omega\subset x$，y 平面，$\partial\Omega$ piecewise smooth，f 為定義於 Ω 上的 Riemann 可積函數，

$\iint_\Omega f(x,y)dxdy$ 可能不好計算，例如 Ω 為單位圓盤時，宜採用極座標 $x=r\cos\theta,y=r\sin\theta,\ (r,\theta)\in[0,1]\times[0,2\pi]$

拉到 r，θ 平面後變成方塊上的積分，好處理。

今設 $x=x(u,v),y=y(u,v),(u,v)\in D\subset u,v$ 平面，

Jacobian 既表面元間的放大率，那麼：

$$\iint_\Omega f(x,y)dxdy=\iint_D f(x(u,v),y(u,v))\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|dudv$$

應該成立。

應該歸應該，天馬行空，固然令人讚嘆，但腳不著地，力從何來，到後來就淪為白雲蒼狗，隨風幻化。還是給個証明吧！

定理 **11-16** 設 Ω,G 分別表 x，y 平面及 u，v 平面上二領域，其邊界片段平滑，$\mathbf{T}:D\to\Omega$ 為對射寫像，$\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=J_{\mathbf{T}}\neq 0$ 在 D 上，則

$$\iint_\Omega f(x,y)dxdy=\iint_D f(x(u,v),y(u,v))\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|dudv$$

証：

(i) 設 $f \geq 0$，令 $Q_x = f, P = 0$，依 Green's 定理：

$$\begin{aligned}
\iint_\Omega f\,dxdy &= \iint_\Omega (Q_x - P_y)dxdy \\
&= \int_{\partial\Omega} Pdx + Qdy \quad \text{(逆時向積分)} \\
&= \int_{\partial\Omega} Qdy \\
&= \pm \int_{\partial D} Q \cdot (y_u du + y_v dv) \quad \text{(加上 $\pm$ 號以調整之，如 (3))} \\
&= \pm \int_{\partial D} Qy_u du + Qy_v dv \\
&= \pm \iint_D [(Qy_v)_u - (Qy_u)_v] dudv \\
&= \pm \int_D [Q_u y_v - Q_v y_u] dudv
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[Q_u y_v - Q_v y_u] &= (Q_x \cdot x_u + Q_y \cdot y_u)y_v - (Q_x \cdot x_v + Q_y \cdot y_v)y_u \\
&= Q_x(x_u y_v - y_u x_v) \\
&= f \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}
\end{aligned}$$

$\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \in C(D),\ \dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \neq \text{ on } D$，

$\therefore \dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$ 在 D 上恆正或恆負，$f \geq 0$，故

$$\iint_\Omega f\,dxdy = \iint_D f \left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right| dudv$$

(ii) f 在 Ω 上可積，$f = f^+ - f^-, f^+, f^- \geq 0$ 可積，

定理對 f^+ 及 f^- 成立，故對 f 成立。

保積寫像：

現代人過年，年節必需品超市幫你準備齊全，只要你口袋裡有錢，要什麼有什麼，年糕、蘿蔔糕、芋粿、發粿、紅龜粿、菜包粿、$\cdots$ ，應有盡有，年糕還有鹹的、紅豆的、八寶的、紫米的、養生的、外省的、$\cdots$ ，真是玲瑯滿目，方便極了。方便是方便，但年節的過程和內容不見了，少了一種年節應有的生命力和氛圍。

我小時在農村長大，每到年節，半個月前就開始準備過年，年節必需品樣樣自己做，從購買糯米 (年糕)、在來米 (蘿蔔糕)，洗浸、磨漿、壓乾，倒入竹篇大盤搗碎成粉，放

入幾塊煮過的熱粉團，加糖搓揉成膏狀，放入蒸籠蒸煮幾小時，就成年糕。小孩子們最期盼媽媽做菜包粿，包上花生、紅豆或蘿蔔乾，又香又好吃。我和弟弟要到田野裡採集野生” 鼠殼”，一連好幾天才有足夠的量，好給媽媽做菜包粿，走在田野裡，陽光斜照，大地蟲鳴，枝枒粼粼，迎風點點，有的像搶頭香似地，已綻放出五顏六色的花朵，乾坤間充滿迎春的喜悅。

那個年代大人小孩都忙著過年，男孩推石磨，大人貼春聯，家家戶戶炊煙裊裊，喜氣洋洋，媽媽最是忙碌，兒女最是歡樂，圍繞在媽媽身邊，幫忙打點，心中充滿新年的期待。

對農家來說，過年是一年辛勤的休息和慶祝，也是對來年的盼望和祝福，鄭板橋說：笑山妻塗粉過新年，田家樂。雖是鄉野村婦，一年到頭在田裡忙碌，過新年也要打扮一下，讓自己開心。孩子長大了，那舊衣褲已穿不下，父母通常會幫我們買一件卡其上衣和長褲。所謂：穿新衣，過新年，好不快樂。至於鞋子，那就不必了，天生的那雙永遠穿不壞，破了，留幾滴血，他自已又會修補好，不用操心。

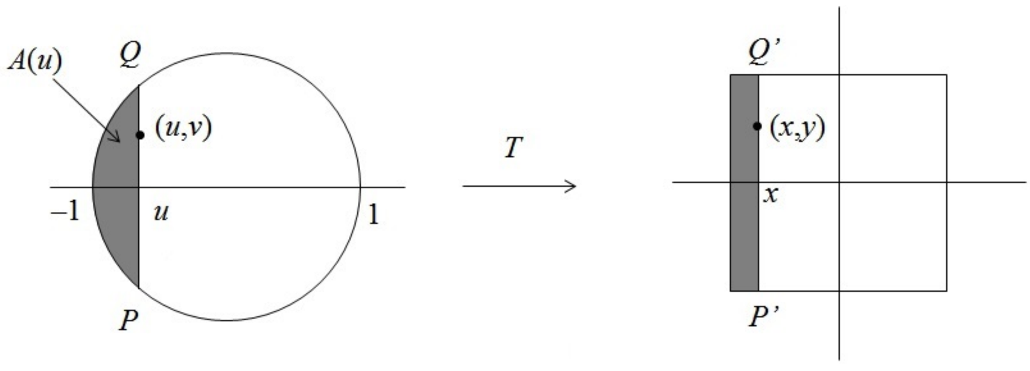
糕粿的製作，媽媽在竹盤上搓那粿團，揉來搓去，粿團因時變形，但任何一區塊在搓揉的過程中體積恆不變，這種過程稱爲保積 (體積) 寫像。

平面上的情形類似，設 D, Ω 爲 $\mathbb{R}^2$ 中二領域，$T : D \to \Omega$ 爲連續對射寫像，若

$$|T(A)| = |A|,\ \forall\ A \subset D,\ \ |A|\text{表}A\text{的面積。}$$

我們稱 T 爲 D 到 Ω 的保積寫像。

例 **1.** 試造一保積寫像，把單位圓盤映成正方形。



(a) (b)

分析：

1. 單位圓盤面積爲 π，故正方形邊長爲 $\sqrt{\pi}$

2. 設 $D: u^2+v^2 \leq 1,\ \Omega = \{(x,y)|0 \leq x,y \leq \sqrt{\pi}\}$

令 $A(u) = 2\int_0^u \sqrt{1-t^2}dt$ 表 D 在 $[-1,u]$ 上的領域 (圖 (a) 著色域)，將此領域映至 Ω 中 $[0,x]\times[0,\pi]$ 上 (圖 (b) 著色域)，並將 $\overline{PQ}$ 等比例映成 $\overline{P'Q'}$

$\mathbf{T}: (u,v) \to (x,y)$，則有

$$x = \frac{A(u)}{\sqrt{\pi}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{-1}^u \sqrt{1-t^2}dt$$
$$y = \frac{v}{2\sqrt{1-u^2}}\cdot\sqrt{\pi}$$

3. 此寫像保積，因

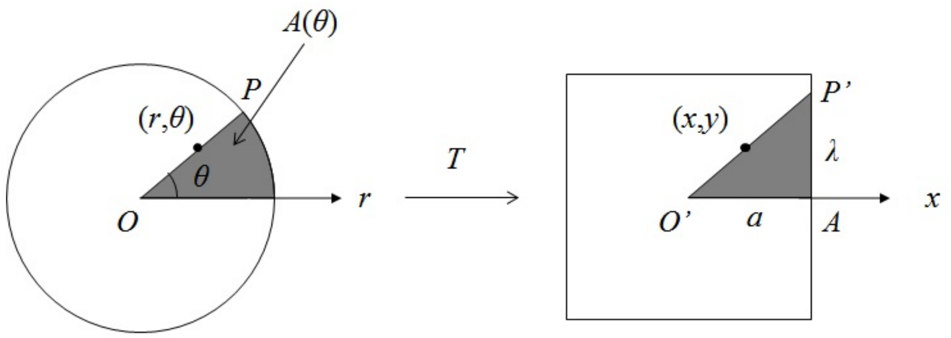
$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dfrac{2\sqrt{1-u^2}}{\sqrt{\pi}} & 0 \\ \cdots & \dfrac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{1-u^2}} \end{vmatrix} = 1$$

Remark:

1. 此寫像僅能將 $D - \{(u,0)|u=\pm1\}$ 映成 $\Omega = (0,\sqrt{\pi})\times[0,\sqrt{\pi}]$

因 $(u,v) = (-1,0)$ 及 $(1,0)$ 在此對應下不知所措

2. 不過寫像千千萬萬，如果你考慮極座標：



(c) (d)

$\mathbf{T}$ 將圖 (c) 中著色域映至圖 (d) 中著色域，並將 $\overline{OP}$ 等比例映成 $\overline{O'P'}$

$\mathbf{T}: (r,\theta) \to (x,y)$，令 $a = \overline{OA} = \frac{\sqrt{\pi}}{2},\ \lambda = \overline{P'A}$，則 $\frac{1}{2}a\lambda = \frac{1}{2}\cdot 1^2\cdot\theta,\ \lambda = \frac{\theta}{a}$

$$\begin{cases} y = \dfrac{\lambda}{a}x \\ \sqrt{x^2+y^2} = r\sqrt{a^2+\lambda^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x &= ar \\ y &= \lambda r = \dfrac{1}{a}r\theta \end{cases}$$

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = \begin{vmatrix} a & 0 \\ \cdots & \frac{1}{a}r \end{vmatrix} = r$$

故此寫像爲保積，**T** 將

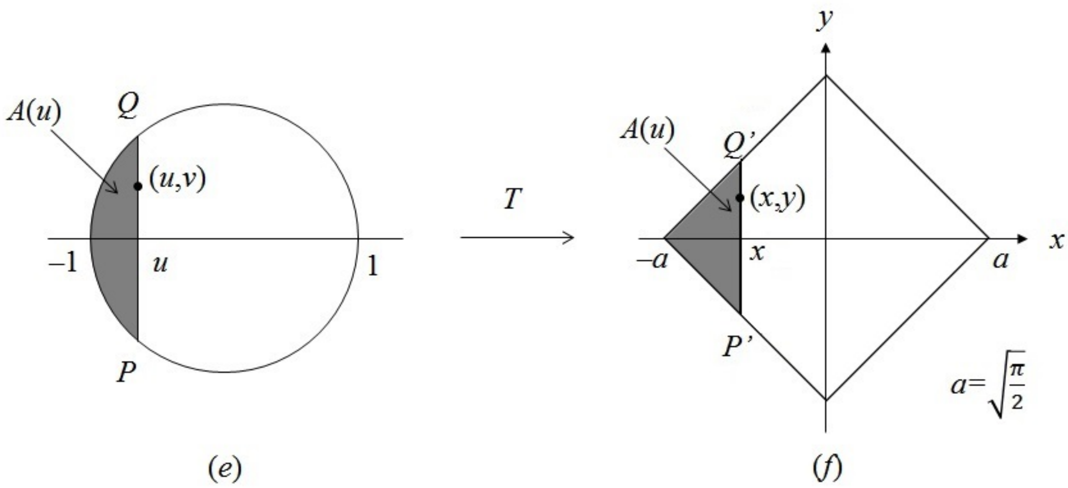
$$D_1 = \{(r,\theta) | 0 \le r \le 1, -\frac{\pi}{4} \le \theta \le \frac{\pi}{4}\}$$

映至

$$\Omega_1 = \{(x,y) | 0 \le x \le \frac{\sqrt{\pi}}{2}, -x \le y \le x\}$$

設 $D = D_1 \cup D_2 \cup D_3 \cup D_4, \Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \Omega_3 \cup \Omega_4$，其中 $D_2, D_3, D_4; \Omega_2, \Omega_3, \Omega_4$ 分別表 D_1, Ω_1 對原點旋轉 $90°, 180°, 270°$ 所得的全等領域，令 **T** 分別把 $D_i \to \Omega_i, i = 2, 3, 4$，即得 D 到 Ω 上的保積寫像。

3. 或者，你也可以把 Ω 轉個 $45°$ 來處理：



T 把圖 (e) 中著色域映至圖 (f) 中著色域，把 $\overline{PQ}$ 等比例映成 $\overline{P'Q'}$

令 $l(u) = \sqrt{1-u^2}$，則 $A(u) = \int_{-1}^{u} 2l(t)dt$，設 $a = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$

則 $A(u) = (x+a)^2, \therefore\ x = \sqrt{A(u)} - a,\ -a \le x \le 0$

又 $\frac{y}{x+a} = \frac{v}{l(u)}, \therefore\ y = \frac{v}{l(u)}\sqrt{A(u)}$

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2}A(u)^{-\frac{1}{2}} \cdot A'(u) & 0 \\ \cdots & \frac{\sqrt{A(u)}}{l(u)} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{l(u)}{\sqrt{A(u)}} & 0 \\ \cdots & \frac{\sqrt{A(u)}}{l(u)} \end{vmatrix} = 1$$

故 **T** 爲保積，把左半圓盤映至左半三角形。

將 **T** 對 y 軸反射，即得 D 到 Ω 上的保積寫像，此寫像將 ∂D 對射到 $\partial\Omega$，不再有迷失點。

4. 在 $\mathbb{R}^3$ 中欲找一保積寫像將單位求映至立方體，就留給同學當習題吧。

5. 我曾經想過這樣的問題：

   班上開過同樂會後，桌椅凌亂無序，今欲將它們恢復秩序，但要最節省能量 (例如總位移最小，或者位移的平方和最小...)，如何設計這個搬遷？

   保積寫像也有類似的問題，以例 1. 爲例，從單位圓盤映至正方形的保積寫像千千萬萬，如何找一最節能的保積寫像，好比說：求 $\mathbf{T}$，使 $\int_D |\mathbf{Tx}-\mathbf{x}|^2 d\mathbf{x}$ 最小 (取平方數學上好處理)。

   我思考這個問題數年，自覺沒找到門路，不過我總認爲人外有人，後生可畏，在此把問題提出，或許那一天你們當中有出類拔萃的後起俊秀，解決此問題，我將爲你讚嘆。

c. 多變數函數座標變換下的積分公式

我們在 b. 小節中利用 Green's 定理導出二維坐標系變換下的積分公式，並藉此介紹 Jacobian 的幾何意義。

於 $\mathbb{R}^3$ 的情形，可利用 divergence 定理仿照二維的情形推導出相應的積分公式，但計算上稍嫌繁複。

這一小節裡，我們將改用另一種思維來看待此問題。

<u>定理 **11-17**</u> 設 $\Omega \subset \mathbb{R}^n(\mathbf{x}-\text{space})$，$f$ 在 Ω 上 Riemann 可積分，
$D \subset \mathbb{R}^n(\mathbf{y}-\text{space})$，$\mathbf{g}: D \to \Omega$ 爲 C^1 對射寫像，
$\mathbf{g}=(g_1, g_2, \cdots, g_n)$，$D\mathbf{g}(\mathbf{y})=[D_i g_j(\mathbf{y})]$ 表 $\mathbf{g}$ 在 $\mathbf{y}$ 點的 Jacobian Matrix，$\det D\mathbf{g}(\mathbf{y}) \neq 0\ \forall\ \mathbf{y} \in D$，則

$$\int_\Omega f(\mathbf{x})d\mathbf{x} = \int_D f(\mathbf{g}(\mathbf{y}))|\det D\mathbf{g}(\mathbf{y})|d\mathbf{y}$$

上式右邊積分爲確保積分存在，我們設 D 爲 Jordan Region，即：∂D 可以用有窮個方塊蓋住，這些方塊的總體積可以任意小。

其中 $D_i g_j = \dfrac{\partial g_j}{\partial y_i},\ \forall\ i, j = 1, 2, \cdots, n$

$|\det D\mathbf{g}(\mathbf{y})|$ 爲此座標變換的 Jacobian，其幾何內涵爲從 $\mathbf{y}$-space 到 $\mathbf{x}$-space n 維體元間的放大率。

爲了証明上述定理，我們引述如下的 Lemma：

Lemma 11-4 設 G 爲 $\mathbb{R}^n$ 中開集，$\mathbf{g}: G \to \mathbb{R}^n$ 爲 C^1, 1-1 寫像，$\det D\mathbf{g}(\mathbf{x}) \neq 0\ \forall\, \mathbf{x} \in G$，給定 $\mathbf{x}_0 \in G$，令 $A = D\mathbf{g}(\mathbf{x}_0)$，則 $\forall\, \epsilon > 0,\ \exists\, \delta$ 使得，對任意 **G** 中以 $\mathbf{x}_0$ 爲心的長方體 K，$\mathrm{diam} K < \delta$，有

$$(1-\epsilon)^n |\det A| \cdot \mathrm{Vol}(K) \leq \mathrm{Vol}(\mathbf{g}(K)) \leq (1+\epsilon)^n |\det A| \cdot \mathrm{Vol}(K)$$

Remark: 上面的 Lemma 說明在座標變換下，$\mathrm{Vol}(K)$ 與 $\mathrm{Vol}(\mathbf{g}(K))$ 間的關係，並隱示 $\det A$(Jacobian of $\mathbf{g}$ at $\mathbf{x}_0$) 爲體元間的放大率。

這個 Lemma 的証明，需要一些基礎工具，引介如下：

工具 **1:** $A = [a_{ij}]$ 表 $n \times n$ 方陣，令 $\mathbf{a}_j$ 表 A 中第 j 個行向量，則 $|\det A| =$ 向量 $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \cdots, \mathbf{a}_n$ 在 $\mathbb{R}^n$ 中所張平行多面體體積。

若將 A 視爲 $\mathbb{R}^n$ 到 $\mathbb{R}^n$ 的寫像，則對 $\mathbb{R}^n$ 中任意長方體 K，恆有

$$\mathrm{Vol}(A(K)) = \det A \cdot \mathrm{Vol}(K)$$

工具 **2:** $f_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$，$f_i$ 在 $\mathbf{x}$ 點可微分若

$$f_i(\mathbf{x} + \Delta\mathbf{x}) = f_i(\mathbf{x}) + Df_i(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{x} + E_i \|\Delta\mathbf{x}\|,\ E_i \to 0 \text{ 當 } \|\Delta\mathbf{x}\| \to 0$$

$\mathbf{f} : \mathbf{R}^n \to \mathbb{R}^n, \mathbf{f} = (f_1, f_2, \cdots, f_n)$，每個 f_i 在 $\mathbf{x}$ 點可微分，則有

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}+\Delta\mathbf{x}) = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + D\mathbf{f}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{x} + \mathbf{E}\|\Delta\mathbf{x}\|,\ \mathbf{E} = (E_1, E_2, \cdots, E_n),\ \|\mathbf{E}\| \to 0 \text{ 當} \|\Delta\mathbf{x}\| \to 0$$

其中 $D\mathbf{f}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{x}$ 表 Jacobian Matrix 對 $\mathbf{x}$ 作用。

工具 **3:** f 在 (a, b) 上一階導數連續，則 f 對 (a, b) 中每一點可微分，即：

$$f(x + \Delta x) = f(x) + f'(x)\Delta x + E \cdot \Delta x,\ E \to 0 \text{ 當 } \Delta x \to 0$$

亦即：$\forall\, \epsilon > 0,\ \exists\, \delta$(與 x 有關)，使得

$$|E| < \epsilon \text{ 當} |\Delta x| < \delta$$

令 K 爲 (a, b) 中的 compact set，則 $E \to 0$ uniformly on K 當 $\Delta x \to 0$.
亦即：$\forall\, \epsilon > 0,\ \exists\, \delta$(與 x 無關) 使

$$|E| < \epsilon \text{ 當} |\Delta x| < \delta,\ \forall\, x \in K$$

以上，工具 1 爲線性代數的基本知識，在此不欲多言。工具 2 只是符號的介紹，工具 3 則有待說明如下：

考慮
$|[f(x+\Delta x)-f(x)-f'(x)\Delta x]-[f(x+\Delta x_1)-f(x)-f'(x)\Delta x_1]|$
$=|(f(x+\Delta x)-f(x+\Delta x_1))-f'(x)(\Delta x-\Delta x_1)|$
$=|f'(\xi)(\Delta x-\Delta x_1)-f'(x)(\Delta x-\Delta x_1)|,\ \xi$ 介於 $x+\Delta x$ 及 $x+\Delta x_1$
$=|f'(\xi)-f'(x)||\Delta x-\Delta x_1|\overset{(*)}{<}\epsilon(\Delta x-\Delta x_1)$ 之間。

$(*): f'$ 在 K 上連續，K 爲 compact，$\therefore f'$ 在 K 上均勻連續。

給定 $\epsilon>0,\ \exists\ \delta$ 使 $|f'(x)-f'(y)|<\dfrac{\epsilon}{2}$ 當 $|x-y|<2\delta,\ x,y\in K$

故

$$|f'(\xi)-f'(x)||\Delta x-\Delta x_1|<\frac{\epsilon}{2}|\Delta x-\Delta x_1|\ \ \text{當}|\Delta x|,|\Delta x_1|<\delta$$

令 $\Delta x_1\to 0$，我們有

$$|\underbrace{f(x+\Delta x)-f(x)-f'(x)\Delta x}_{=E\cdot\Delta x}|\leq\frac{1}{2}\epsilon\Delta x<\epsilon\Delta x,\ \text{當}|\Delta x|<\delta\ (\delta\text{與}x\text{無關})$$

故

$$|E|<\epsilon\ \text{當}\Delta x<\delta,\ \forall\ x\in K$$

Lemma 11-4 的証明：

1. Translation to the origin

   令 $\tilde{\mathbf{g}}(\mathbf{x})=\mathbf{g}(\mathbf{x}+\mathbf{x}_0)-\mathbf{g}(\mathbf{x}_0)$，則 $\tilde{\mathbf{g}}(\mathbf{0})=\mathbf{0}$
   $\mathrm{Vol}(\mathbf{g}(K))=\mathrm{Vol}(\tilde{\mathbf{g}}(K)),\ \mathrm{Vol}(\mathbf{g}(K))$ 表 $\mathbf{g}(K)$ 的" 體積"

2. Normalization at the origin

   令 $\mathbf{h}(\mathbf{x})=A^{-1}\tilde{\mathbf{g}}(\mathbf{x}),A=D\tilde{\mathbf{g}}(\mathbf{0})=D\mathbf{g}(\mathbf{x}_0)$

   則 $D\mathbf{h}(\mathbf{x})=A^{-1}D\tilde{\mathbf{g}}(\mathbf{x})$，故 $D\mathbf{h}(\mathbf{0})=\mathbb{I}$ (Identity matrix)

3. Approximation by linear function

   $\mathbf{h}\in C^1,\ \mathbf{h}(\mathbf{0})=\mathbb{I}$，故

$$\mathbf{h}(\mathbf{x})=\mathbf{x}+\mathbf{E}\cdot\|\mathbf{x}\|,\ \|\mathbf{E}\|\to 0\ \text{當}\ \|\mathbf{x}\|\to 0$$

給定 $\epsilon > 0$, $\exists\, \delta$ 使得

$$\|E\| < \epsilon \text{ 當} \|\mathbf{x}\| < \delta$$

於是有

$$(1-\epsilon)\|\mathbf{x}\| \le \|\mathbf{h}(\mathbf{x})\| \le (1+\epsilon)\|\mathbf{x}\|$$

4. K 爲以 $\mathbf{0}$ 爲心的長方體，$\text{diam}K < \delta$，故有

$$(1-\epsilon)K \subset \mathbf{h}(K) \subset (1+\epsilon)K$$

5. 將 A 作用於上式，我們有

$$(1-\epsilon)A(K) \subset A\mathbf{h}(K) \subset (1+\epsilon)A(K)$$

而 $A(\mathbf{h}(K)) = \tilde{\mathbf{g}}(K) = \mathbf{g}(K)$，故

$$(1-\epsilon)A(K) \subset \mathbf{g}(K) \subset (1+\epsilon)A(K)$$

6. 取 Volume，則有

$$(1-\epsilon)^n\|\det A\|\text{Vol}(K) \le \text{Vol}(\mathbf{g}(K)) \le (1+\epsilon)^n\|\det A\|\text{Vol}(K)$$

Remark:

1. 這個 Lemma 是整個問題証明的關鍵。Lemma 既証，則定理呼之欲出。

   這個 Lemma 對問題的處理很聰明，我尤其稱讚上述證明的第 2 點，Normalization at the origin，一下子使問題變得很簡單，真是妙招。

2. 定理 11-17 的証明在高等微積分中是一項大工程。我參閱群書，最後採 J. Cooper 所著 Working Analysis(2005, Elsvier 出版) 的處理方法，簡潔、有力、用心，好！(我稍作修改)

定理的証明：

我在 11-4 節中提到 Riemann 積分有它的竅門，我們現在就來觀它的竅門。

1. 設 $K \subset D$ 爲 $\mathbb{R} - \mathbf{y}$ space 中的長方體，$f = \chi_{\mathbf{g}(K)}$，則

$$\int_\Omega f(\mathbf{x})d\mathbf{x} = \int_\Omega \chi_{\mathbf{g}(K)}(\mathbf{x})d\mathbf{x} = \text{Vol}(g(K)) = \sum_{i=1}^N \text{Vol}(\mathbf{g}(K))$$

   其中 $K = \bigcup_{i=1}^N K_i$ 爲 K 上的分割，每個 K_i 爲一小長方體，心在 $\mathbf{y}_i$

2. $\mathbf{g} \in C^1(D)$，K 爲 D 中 compact set，依上述工具 3 的分析，Lemma 11-4 中的 δ 與 K 的中心點無關，設 K 分得夠細，使 $\operatorname{diam}(K_i) < \delta$，則有

$$(1-\epsilon)^n |\det D\mathbf{g}(\mathbf{y}_i)| \operatorname{Vol}(K_i) \leq \operatorname{Vol}(\mathbf{g}(K_i)) \leq (1+\epsilon)^n |\det D\mathbf{g}(\mathbf{y}_i)| \operatorname{Vol}(K_i)$$

$\forall\, i = 1, 2, \cdots, N$，從而

$$(1-\epsilon)^n \sum_{i=1}^{N} |\det D\mathbf{g}(\mathbf{y}_i)| \operatorname{Vol}(K_i) \leq \int_\Omega \chi_{\mathbf{g}(K)}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \leq (1+\epsilon)^n \sum_{i=1}^{N} |\det D\mathbf{g}(\mathbf{y}_i)| \operatorname{Vol}(K_i)$$

而 $\sum\limits_{i=1}^{N} |\det D\mathbf{g}(\mathbf{y}_i)| \operatorname{Vol}(K_i)$ 爲 $|\det D\mathbf{g}(\mathbf{y})|$ 對 $K_1, K_2, \cdots, K_n$ 的 Riemann Sum，它要 $\to \displaystyle\int_K |\det D\mathbf{g}(\mathbf{y})| d\mathbf{y}$ 當$\delta \to 0$

又 ϵ 任意，故有

$$\int_\Omega \chi_{\mathbf{g}(K)}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \int_K |\det D\mathbf{g}(\mathbf{y})| d\mathbf{y} = \int_D \chi_K(\mathbf{g}(\mathbf{y})) \det D\mathbf{g}(\mathbf{y}) d\mathbf{y}$$

故定理對特徵函數成立，因此對 step function 成立。

3. $\mathbf{g}$ 連續，$\operatorname{diam} K_i \to 0 \Rightarrow \operatorname{diam} \mathbf{g}(K_i) \to 0$

故若 D 上的 step function $\varphi = \sum\limits_{i=1}^{N} m_i \chi_{K_i}(\mathbf{y}) |\det D\mathbf{g}(\mathbf{y})|$ 的積分趨近於

$$\int_D f(\mathbf{g}(\mathbf{y})) \det |D\mathbf{g}(\mathbf{y})| d\mathbf{y}$$

當 $\delta_\varphi = \max\{\operatorname{diam} K_i\} \to 0, i = 1, 2, \cdots, N$，

則相應於 Ω 上的 step function

$$\psi = \sum_{i=1}^{N} m_i \chi_{\mathbf{g}(K_i)}(\mathbf{x})$$

的積分趨近於

$$\int_\Omega f(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$$

而 $\displaystyle\int_\Omega \psi = \int_D \varphi$，定理對 step function 成立，故定理對 f 成立。

4. 對一般 Riemann 可積函數 f，$f = f^+ - f^-, f^+, f^- \geq 0$
f Riemann 可積 $\Leftrightarrow f^+, f^-$ Riemann 可積

定理對 f^+, f^- 成立 $\Rightarrow$ 定理對 f 成立。

最常見的座標變換，在平面上，有極座標變換。$\mathbb{R}^3$ 中有圓柱座標及球面座標，在初微中都已熟悉，在此重述如下：

1. 平面上極座標變換：$x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$
   $(x,y)\in\Omega \Leftrightarrow (r,\theta)\in D$，則
$$\int_\Omega f(x,y)dxdy = \int_D f(r\cos\theta, r\sin\theta)r\,drd\theta$$
2. $\mathbb{R}^3$ 中圓柱座標變換：$x = r\cos\theta, y = r\sin\theta, z = z$
   $(x,y,z)\in\Omega \Leftrightarrow (r,\theta,z)\in D$，則
$$\int_\Omega f(x,y,z)dxdydz = \int_D f(r\cos\theta, r\sin\theta, z)r\,drd\theta dz$$
3. $\mathbb{R}^3$ 中球面座標變換：$x = (r\sin\varphi)\cos\theta, y = (r\sin\varphi)\sin\theta, z = r\cos\varphi$
$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,\varphi)} = -r^2\sin\varphi$$
   $(x,y,z)\in\Omega \Leftrightarrow (r,\theta,\varphi)\in D$，則
$$\int_\Omega f(x,y,z)dxdydz = \int_D f(r\cos\theta\sin\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\varphi)r^2\sin\varphi\,drd\theta d\varphi.$$

11.11 曲面面積

a. 回憶曲線長度的求法：

設 Γ 爲平面上一平滑曲線，$P: A_0, A_1, A_2, \cdots, A_n$ 爲 Γ 上的分割，

令 $L(P) = \sum\limits_{i=1}^{n} \overline{A_{i-1}A_i}$

定義 Γ 的弧長 $|\Gamma| = \sup\limits_P L(P)$

這個概念可不可以推廣到曲面上，據以求曲面面積呢？

換言之，設 $S\subset\mathbb{R}^3$ 爲一有界平滑曲面，在 S 上任取 n 點，相鄰三點可定一三角形。

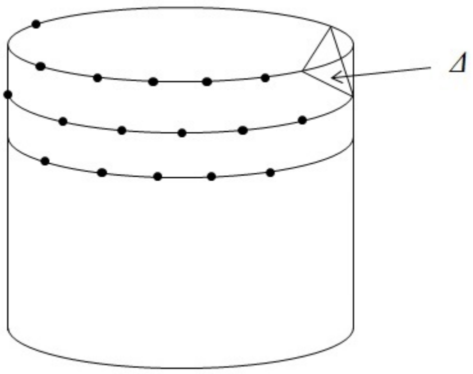
令 $S(P) =$ 諸三角形之面積和

是否可定義 S 的面積 $|S| = \sup\limits_P S(P)$ 呢？

不可！不可！不可！H.Schwartz(1843-1921，德國數學家) 這樣說。

b. Schwartz 的反例

Schwartz 觀察如下的例子：設 S 爲半徑 1、高 1 的圓柱面



1. 將圓周 n 等分，高 m 等分

   第 1、3、5、$\cdots$ 環等分點對齊
   第 2、4、6、$\cdots$ 環等分點對齊

   奇數環和偶數環互相對稱錯開

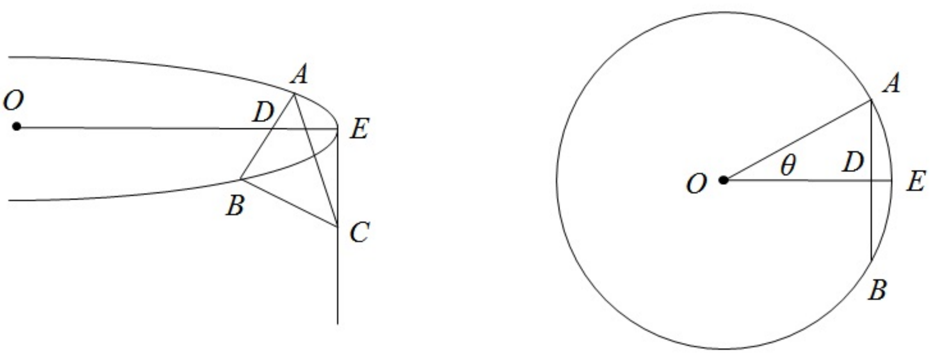
2. 任意相鄰三點定一三角形，諸三角形全等，令 Δ 表這些三角形面積。

3. 每一環有 $2n$ 個 Δ，共 m 環，故諸三角形面積和

$$S_{m,n} = 2mn\Delta$$

4. $\Delta = ?$

   如圖，$\Delta = \frac{1}{2}\overline{CD} \cdot \overline{AB}$



(a) (b)

令

$$\begin{aligned}
\theta &= \angle AOD = \frac{\pi}{n} \\
\overline{AB} &= 2\sin\theta = 2\sin\frac{\pi}{n} \\
\overline{DE} &= 1-\cos\theta = 1-\cos\frac{\pi}{n} \\
\overline{CD} &= \sqrt{\overline{CE}^2+\overline{DE}^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{m}\right)^2+\left(1-\cos\frac{\pi}{n}\right)^2}
\end{aligned}$$

$\therefore$

$$\Delta = \sin\frac{\pi}{n}\cdot\sqrt{\frac{1}{m^2}+\left(1-\cos\frac{\pi}{n}\right)^2}$$

$$\begin{aligned}
S_{m,n} &= mn\sin\frac{\pi}{n}\sqrt{\frac{1}{m^2}+\left(1-\cos\frac{\pi}{n}\right)^2} \\
&= n\sin\frac{\pi}{n}\sqrt{1+\left[m\left(1-\cos\frac{\pi}{n}\right)\right]^2}
\end{aligned}$$

5. 已知 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1,\ \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}=\dfrac{1}{2}$

   取 $m=n^3$，發現 $S_{m,n}\to\infty$ 當$n\to\infty$

   而圓柱面積 $S=2\pi$，上面的推論顯然謬誤！

c. 爲什麼會有這麼大的差異呢？

1. 曲線的情形，以 $\Gamma=\{(x,f(x)|a\le x\le b\}$ 爲例，

   將 $[a,b]$ 作分割 $P: a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$

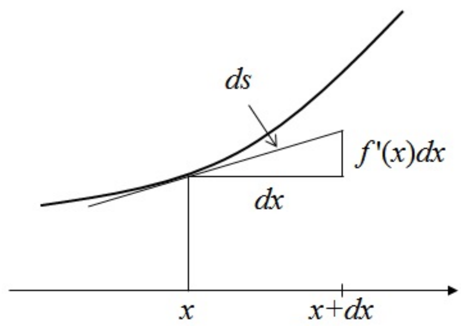
   $A_i=(x_i,f(x_i))$

   $\overline{A_{i-1}A_i}=\sqrt{(x_i-x_{i-1})^2+[f(x_i)-f(x_{i-1})]^2}=\sqrt{1+f'(\xi_i)^2}\Delta x_i$

   $L(P)=\sum\sqrt{1+f'(\xi_i)^2}\Delta x_i\to\int_a^b\sqrt{1+f'^2(x)}dx$ 當$\|P\|\to 0$

   $ds=\sqrt{1+f'^2(x)}dx$

圖示之：



即：曲線的弧元恆沿切方向計算，和曲線很貼切。

2. 上述 Schwartz 的例子，$m = n^3$

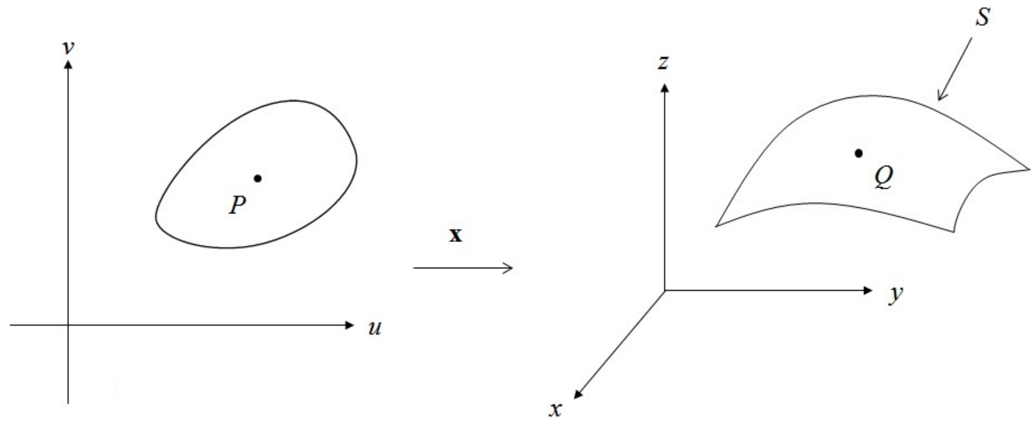
圓周上作 10 等分，鉛直方向作 10^3 等分
圓周上作 100 等分，鉛直方向作 10^6(一百萬) 等分

當 n 很大時，那些諸 Δ 不是貼著柱面走，而是近乎垂直於柱面走，弄出來的東西當然不會是柱面面積了。

d. 該怎麼辦？

沿切平面逼近就對了！

設 $S = \{(x(u,v), y(u,v), z(u,v)) | (u,v) \in D\}$
令 $\mathbf{x} = (x,y,z)$，表此寫像



$\mathbf{x}$: $P(u_0,v_0) \to Q(x_0,y_0,z_0)$

(i) 固定 $v = v_0$，$L_{v_0}(u) = (u, v_0)$ 爲平行 u 軸直線，
$\Gamma_{v_0} = \mathbf{x}(u, v_0)$

Γ_{v_0} 在 Q 點的切向量 $\mathbf{a} = \mathbf{x}_u(u_0, v_0)$

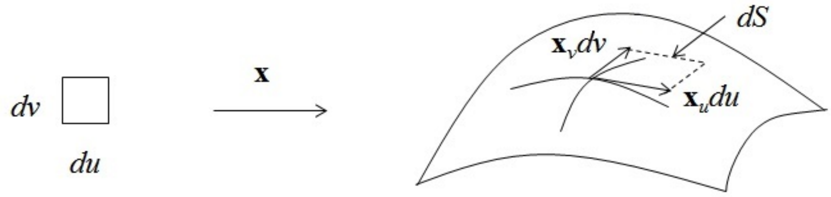
當 u 沿 L_{v_0} 上有微小增量 du，相應於 Γ_{v_0} 上切方向的增量爲 $\mathbf{x}_u(u_0, v_0)du$

(ii) 固定 $u = u_0$，$L_{u_0}(v) = (u_0, v)$ 爲平行 v 軸直線，
$\Gamma_{u_0} = \mathbf{x}(u_0, v)$

Γ_{u_0} 在 Q 點的切向量 $\mathbf{b} = \mathbf{x}_v(u_0, v_0)$

當 v 沿 L_{u_0} 上有微小增量 dv，相應於 Γ_{u_0} 上切方向的增量爲 $\mathbf{x}_v(u_0, v_0)dv$

將 (i)(ii) 圖示如下：



u,v 平面上的面元 $dudv$　　　曲面上的面元 $dS=|\mathbf{x}_u\times\mathbf{x}_v|dudv$

$\mathbf{x}_u du, \mathbf{x}_v dv$ 所張平行四邊形面積為 $|\mathbf{x}_u du \times \mathbf{x}_v dv|$

令 $dS = |\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v| dudv$，即為曲面 S 上的面元。

定義：S 的面積 $|S| = \int_D |\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v| dudv$

$$|\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v| = \left\| \begin{array}{ccc} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{array} \right\| = \sqrt{\left| \begin{array}{cc} y_u & z_u \\ y_v & z_v \end{array} \right|^2 + \left| \begin{array}{cc} z_u & x_u \\ z_v & x_v \end{array} \right|^2 + \left| \begin{array}{cc} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{array} \right|^2}$$

故

$$|S| = \iint_D \sqrt{\left| \begin{array}{cc} y_u & z_u \\ y_v & z_v \end{array} \right|^2 + \left| \begin{array}{cc} z_u & x_u \\ z_v & x_v \end{array} \right|^2 + \left| \begin{array}{cc} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{array} \right|^2}\, dudv$$

當 $S = \{(x, y, f(x, y)) | (x, y) \in D\}$ 表函數型曲面，

$dS = \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2} dxdy$

$|S| = \iint_D \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2} dxdy$

(第十一章全文完)