101 學年度台灣大學數學系高等微積分（上）

課程內容

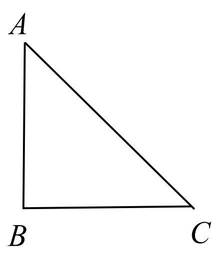
第一章　導論

1. 一則小故事

我曾經帶過台北區數學資優高中生，在講到複數時，我在黑板上寫道：

$i < 2i$ 對不對？

大家都說不對。
我再問：　為什麼不對？一個 i 比 2 個 i 少，有什麼不對？
「複數不能比較大小」 班上同學異口同聲回答道。
我又問：複數為什麼不能比較大小？
教室裡一片寂然，年輕的眼神僵在那哩，幾秒鐘後有人說「老師這麼告訴我們」，有位女生很有創意地說：”因為複數不存在！”
我接著問：那你認為 $\sqrt{2}$ 存在嗎？
「存在！」這位女生很自信地回答道。
我問：如何讓我相信它存在？
女生上台，在黑板上畫一等腰直角三角形



圖一

$\overline{AB} = \overline{BC} = 1 \qquad \overline{AC} = \sqrt{2}$

我接著問：你怎麼知道 $\overline{AB} \perp \overline{BC}$ ，且 $\overline{AB} = \overline{BC} = 1$ ？
她說：可以用尺規作圖。

我說：每人的鉛筆粗細有別，再細的筆放在電子顯微鏡下一看，簡直不敢相信，它是坑坑洞洞，凹凹凸凸的，由許多不連續的碳粉所組成的軌跡。什麼是直線？什麼是點？真叫人無言以對。

她說：可是我們可以實實在在地感受到，如果 $\overline{AB}=\overline{BC}=1$，那麼 $\overline{AC}$ 就是 $\sqrt{2}$ 。

我說：你的如果，在現實世界中並不存在。它是存在於人的理性世界裡，現實世界裡劃不出直角，劃不出 1，可是你認為 $\sqrt{2}$ 很實在。有人說，有一數的平方等於-1，把它叫做 i ，絕大多數的人都認為這個人瘋了，一個數的平方怎麼可能是負的呢？那是我們習慣實數的運算，天天接觸，不疑有他，不會有他！

我五歲的時候在台北的中山北路第一次看到洋人。但見一個渾身黃毛，腮頰盡鬚，鼻隆眼深，珠露藍光的動物騎在馬上，我以為是一隻奇怪的大猴子騎著馬在那邊散步，可是他的神情笑容又與人無異，驚訝不已！

習慣常常是束縛人的繩索，習慣成自然就認為天經地義，不容易接受與自己經驗相駁的新鮮事物。

i 和 $\sqrt{2}$ 一樣，在現實世界中都不存在，它們都是概念性地存在於人的理性世界中。只不過 $\sqrt{2}$ 可以透過圖像來了解，我們很容易接受它，而 i 則必須透過冥想來了解，因為他幽隱，不會在現實世界中直接顯像給你看，使人感覺它很不實在。

什麼叫實在? 實在是很主觀的感覺！

下面所述是一則真實故事。

台北縣鶯歌某小學老師出了一個問題請小朋友回答：

下列幾樣事物你認為那一項最重要?

(1) 陽光、空氣、水 (2) 金錢 (3) 親情 (4) 學識、名譽 (5) 漂亮(瀟灑)又甜蜜的另一伴

有不少小朋友的答案是(2)，那是小朋友很實在的感覺。

不要以為小朋友無知，大人的糊塗有更甚於小朋友者，否則每天也不會有那麼多奇怪怪的社會新聞，讓人怵目驚心。

水可以結冰，水可以化氣，你不能說冰很實在，化成氣體看不見了就不實在。

眼所見，未必是真。耳所聞，未必是實。空中妙有，未必不實在。

透過 i ，可以設計飛機翼，探討流體力學；透過 i ，可以計算 π 的近似值，研究數論；透過 i ，可以處理物理上的許多問題，量子力學中不能沒有它；透過 i ，幾何中最小曲面的存在問題得到解決，許多不可思議的漂亮特性因它而得……妳說 i 到底實不實在？

虛虛實實，有形無形，本是事物所呈現的一種形式，放棄自己的執著，慧眼才能萌生，才能體悟事物的本質。

諸相非相

金剛經裡有一段經文如下：

「凡所有相皆是虛妄。

若見諸相非相，即見如來。」

相是指形而下世界裡的點點滴滴，名利財色等，這些都是阻礙人們見到真如本性的絆腳石；不被形而下世界諸相所迷，就能見到你的本來面目。佛陀如是說。

我覺得這段經文對學數學有很大的啟示，人一著相就被黏住，頭腦僵硬，思想被框限起來，很難凌空看這世界，創造力也漫漫凋萎，開不出芬芳的花朵。

能夠創造出i這個數的人，一定不是凡人。對i這個數仍感到不舒服的人，一定是著相太深。

不只是數學，任何學問皆是如此。當物理學家知道用能量的觀點來統籌物理定律的時候，物裡學就已進入一個新的里程。最小作用原理說：

任何物理運動的軌跡，恆使運動過程中，總動能與總位能的差最小

誰看到動能了？誰看到位能了？可是它統籌了一切物理運動定律！你說它存不存在？實不實在？

能提出這種理論的人真是慧眼獨具啊！

物理是一門科學，動能與位能都可以量化。量與量之的關係由物理定律所規範，研究量與量的變化關係，預測事物的發展，而引入數學。

世間許多事物是無法量化的，這些無法量化的事物背後隱藏著無法量化的能量，主導著事物的發展，小至個人、家庭，大至社會、國家乃至全體人類，吉凶禍福，隱於其中。它作用於人而人不自知，隨其流轉不能自已。有人不畏風寒，半夜跑到河邊捧沙，喜見明牌，雀躍不已。有人千方百計，要把自己變洋，頭髮染成金黃不說，眼珠子也貼上兩塊藍色的膠膜；明明是美麗的丹鳳眼，卻恨它不疊雙，整形隆鼻，成為怪胎，自己高興。柬埔寨的一場政治風暴，兩百萬社會中堅命喪黃泉，當時柬國人口約五百萬，可見其殺戮之重；當其殺人也，無不自認代天行道高舉正義之旗。如今，自殺以殺死許多無辜之人，毀滅無數溫馨的家庭，造成多少傷痛無助的孤兒寡女，卻深信可以直達上帝的身邊，受上帝的關愛，上帝也瘋狂了！

如果真有無間地獄，那裡面住的不會是獅子老虎，獅子老虎吃飽了就睡，餓了又吃，雖然兇猛，不懂得作惡。打輸了就讓出寶座，交出城池，也不知道要臥薪嘗膽，獻上西施。牠們捕捉到一隻羚羊小姐，不會見她體態豐美，吃了可惜，先強暴她，再來吃她。只有人才有那個精靈，懂得轉那個彎，造那個惡，開那扇門，進入那個世界。

不要說沒有天堂，沒有地域，你怎知道？其實眼前就有地獄：有人作奸犯科，不敢見光；有人吸食毒品，不能自拔；有人殺父弑母，震驚社會。不是地獄又是什麼？

佛陀稱我們這個世界為娑婆世界，意思是堪忍世界，這個世界的苦特別多，眾生有個特性，很能忍受那個苦，人苦而不自知。也因為這個世界有那麼多苦，有緣的人才能悟，

知道要修行，能夠成仙成佛。天人享受福報，無憂無慮，福報享盡，五衰而亡，成佛不在天界。

仙佛也是人來做，地獄也是人來鑽。聰明的你，要作何選擇？可是多少聰明人不由自主地往地獄裡鑽，為什麼？值得我們借鏡深思。

這種能量因無法量化，數學幫不上忙，必須用另一種智慧來體會它。它可以讓人開竅，可以讓人愚蠢；可以讓人昇華，可以讓人墮落；可以孕育兒女，可以破碎家庭；可以開創盛世，可以導引亂世。智者識之，仁者憂之。

親愛的，請想一想，周遭所見，不在名利財色中車拚的有幾人？前進百大目的何在？尋求歷史定位所求為何？歷史上堪稱盛世的有幾年？亂世又有多長？將來入了社會的你還能保有一顆純善的心靈否？懷著祝福的婚姻會不會以離散收場？

可以量化的能量不會作怪，不可量化的能量阿……好好關照那顆心。

研習科學之外，聖賢的書不要視之如糞土。聖賢不會是糞土，視之如糞土，反使自己成糞土。

岳陽樓記中說「予嘗求古仁人之心，或異二者之為，何哉？不以物喜，不以已悲，居廟堂之高則憂其民；處江湖之遠，則憂其君。是進亦憂，退亦憂；然則何時而樂耶？其必曰：『先天下之憂而憂，後天下之樂而樂』呼！噫！微斯人，吾誰與歸？」

這樣的情懷可以讓人生命發光，照亮人間；雖不能至，心嚮往焉。

2. 數學的本質

數學中所提出的結論是絕對真理，不會因時空的流轉而有所改變，故稱之為「定理」。其他科學裡，見不到「定理」這樣的稱呼。物裡學中只見到牛頓三大運動定律，物質不滅定律，最小作用量原理，相對論……等，生物學中有達爾文提出的演化論，沒有人敢說它提出的是「定理」。

數學和其他科學在本質上有很大的不同，其他科學必須接受現實世界的檢驗。哪一天要被修正？不知道。牛頓力學在巨觀世界裡很管用，到微觀世界裡就行不通，量子力學於焉誕生。愛因斯坦神來之筆，以光速恆常來刻劃時空關係，提出相對論，宇宙中沒有比光更快的粒子！這也是愛因斯坦如是說，說不定哪一天也要面對修正。

物質不滅定律不是被證明出來，因為屢試不爽，我們相信宇宙是這樣的，你不能問為什麼要相信？這樣你沒辦法讀物理。

物理靠觀察，觀察要儀器，儀器有它的限制，在儀器力有未逮之處，你怎知道真相是什麼？你怎知道哈伯太空望遠鏡感應不到之處空空如也？觀察借助光波（或電磁波等），光波走宇宙的測地線(Geodesics)，誰曉得宇宙是封閉的還是開放的？你怎知道本宇宙之外沒有其他宇宙存在？你怎知道在那遙不可及之處物質仍然不滅？光速仍然恆常？

到了那一天再來修正吧！物理學家這樣說。這是科學之所以讓人信賴的地方，科學願意修正，宗教不能修正，能修正就不是宗教，你必須接受幾千年前人類的宇宙觀，否則無法虔誠，從信仰中得到力量。

物理雖有它的無可奈何之處，至少目前這套物理在我們的周遭很管用，還沒發現它有什麼紕漏。他能登月球，上火星，探測宇宙奧秘，前人所未敢夢；又能照亮黑暗，改變生產，衛星通訊，造福人類，創造現代文明。偉哉，物理！

為什麼數學是絕對真理？

你在證明定理 A 的時候，用到定理 B；定理 B 的證明又用到定理 C，定理 C 又用到定理 D……如此一直問下去，你只好投降，在某個地方叫停，不能再問下去了。不能問的東西稱為公理（Axiom）：你同意，我同意，我們都接受它。由這些公理所推導出來的結論就叫定理。

名詞也是如此。

你要解釋名詞 A，需要用到名詞 B，而什麼是 B 你又用 C 來解釋，什麼是 C 你又用到 D……如此一直問下去你只有詞窮，在某個地方叫停，不能再問下去了。不能問的東西就稱為無定義名詞：你知，我知，彼此心有靈犀一點通，知道它是什麼，可是又沒辦法說他是什麼。

公理和無定義名詞，是概念性的存在於人的理性世界裡。那個世界是人類彼此溝通的平台。

在歐幾里德幾何（Euclidean Geometry）中，點，直線，平面，空間等是無定義名詞。在實數系中，0 和 1 兩個數字不能問，由此產生整數系，由整數系和四則運算而產生有理數系。人類早期數字活動大概都在有理數系的世界裡推演，直到兩千餘年前發現了無理數，人們才恍然大悟，原來有理數之外還有許多我們不認識的數，但是什麼是實數，那些奇怪的數到底有多少？人們還是霧裡看花，直到 1860 年代德國數學家 R. Dedekin（1831-1916）提出了實數的建構，以及稍後 G. Cantor (1845-1918)對集合論的研究，人們才清晰地看到美麗的花朵。

我們這門課也將從實數的建構講起，由此展開近代數學的脈絡筋骨，讓你對近代數學有個通透的了解，並培訓你的基本功夫。如果說微積分是把你磨成一把小刀，那麼高等微積分要把你煉成一枝劍，使你能進出江湖，不用害怕。

當然，公理是建立在你我的共識上，所謂絕對真理是存在於人的理性世界裡，它因人而生，因人而存。其他物種如何？有一句話說：對牛彈琴。琴猶如此，想來對牛說 i，牛對你哞幾聲算是很給面子了。

我認識一位信佛的朋友，從烏山頭水庫獲得一隻大烏龜，少見的大，他心想，這麼大的烏龜，少說也有百歲以上，應該也是一個修行者。烏龜是雜食性動物，葷素不拘，他認為殺生不好，有礙修行，佛法無邊可度化牠，於是把牠放在一個大盆子裡，不能自由，斷絕一切葷食，那錄音機不停地巡迴播念佛號，無休無止，我不知道烏龜受度化了沒有，只知道不到一年，那烏龜生病了，不飲不食，又不久竟昇天去了。

阿彌陀佛！但願牠能往生西方極樂世界，離苦得樂，不再受世人擺佈。

不要去對烏龜談信仰，就跟不要對牛說 i 一樣。宗教也是人類文化的一環，同樣因人而生，因人而存。它能使人產生高貴情操，寄託生命；也能使人自以為殊勝，至高無上，被牽著鼻子走，執迷不誤，糊塗一生。

世間有偉大的科學家，也有提煉毒品，非法牟利的科學工作者；有偉大的宗教家，也有偏狂固執，走入邪門的宗教信仰者。發心不正，常容易誤入歧途。信教不是壞事，但願有宗教信仰的朋友，都能了澈開創者的本心，寄託生命，懷有高貴情操，讓自己的生命含光，點化迷津，造福人間，信自己所信，也能尊重別人所信。

我在台北青田街住了十五年，那是台大日式宿舍，有庭有院，三不五時就有人來按門鈴，要向我借幾分鐘，跟我談生命的道理，其中有華人、美國人、日本人、韓國人等，分屬某信仰的不同教派，我說我家裡有祖先的牌位，請你們尊重，另找別人去。他們一聽有祖先牌位，更是認真起來：「我們人人帶罪，只有基督的寶血能為我們洗清罪惡，因祂得救。信真神，不可拜祖先，祖先是人不是神，不能救你。」認為我需要救贖，不肯離開，令我困擾不已。

我想仰頭問天：基督阿，這是祢的道嗎？

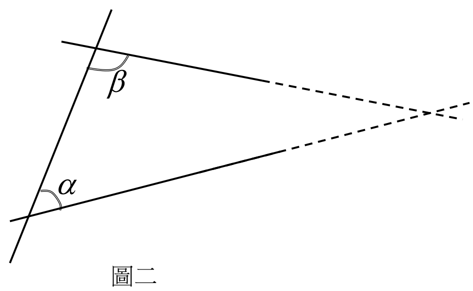
人從歷史中來，或許有一天也要從歷史中去， 哪一天人類走進了歷史(這一天不要說它不可能)，所謂絕對真理，也就不絕對了。一切宗教，都歸沉寂，一切紛爭，終歸平靜，Allah 和 God 之間再也不會有矛盾了。

或許在那遙遠的宇宙深處，有很高靈性的生命存在，他們怎麼看待生命？怎麼看待宇宙？人類這套文明，在那裏還管用嗎？雖不能知，卻可讓人知所謙思。

3. 歐幾里德平面幾何的五大公理

歐幾里德在他的《幾何原本》中提出下列五大公理：

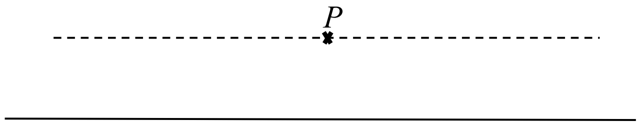
1. 任意兩點可以連一直線
2. 任一線段可以無限延長
3. 給定任意點及任意線段，能以該點為中心，線段長為半徑作一圓
4. 凡直角都全等（指兩角間的領域全等）
5. **（平行公理）**：
   兩條直線若同時與第三條直線相交，且在這直線同側相應的兩內角和小於兩個直角，則此二直線在該側相交（圖二）



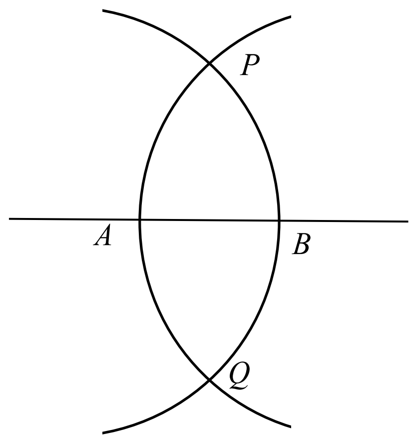
圖二

第 5 公理等價於如下敘述：

5’ 過線外一點，可作唯一一條直線與給定直線平行



其實歐幾里德這五大公理並不完備，例如相疊的兩圓必定相交，具有兩個交點（圖三）



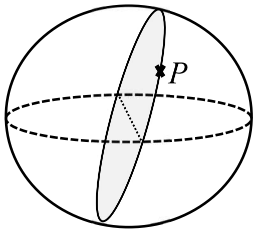
圖三

為什麼必相交?為什麼有兩個交點?歐氏對此並未交代清楚。

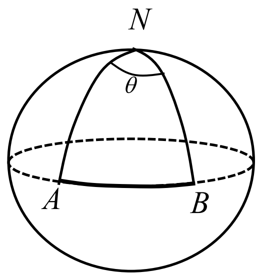
平行公理是否可由其他 1-4 公理導出？二千年來一直引起許多人的討論，不知多少英雄豪傑提出證明，沒有一人成功。一直到十九世紀三零年代俄國數學家 Lobachevsky（1792-1856），和匈牙利數學家 Bolyai（1802-1860）先後提出不同模型的非歐幾何，人們才清楚認識到平行公理是證不得的。

其實最簡單的非歐幾何就是球面幾何，我們生活於其上的地球表面。一條船在大海上沿某固定方向航行，船上的人認為他們走的是直線，在地球外以歐氏眼光來看，船走的是一個大圓（圓心在球心的圓）。直線本來就是無意義名詞，直線或者大圓只是觀點的問題，船上的人認為直線就是直線。

設 S 表單位球面，其上直線為一大圓（歐氏眼光下），則此幾何滿足歐氏 1-4 公理，但不滿足第 5 公理（圖四）



圖四
過赤道外一點 P 的直線恆與赤道相交

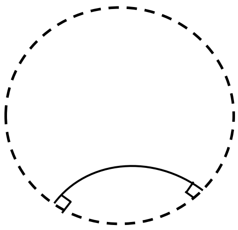


圖五
三角形 NAB 內角和 > 180°

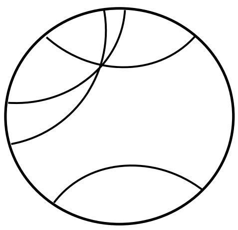
在這個幾何世界裡，三角形內角和 > 180°，數學上稱之為 Elliptic Geometry。

另一個出名的非歐幾何模型由 Poincare 提出，稱為 Poincare model，內容如下：

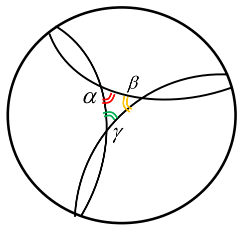
設 D 表開單位圓盤（不含邊界），其上直線為垂直圓周的圓弧（歐式眼光）（圖六）。想像某種生物生活於其間，受到某種場的作用，生物由 A 點至 B 點的最短路徑就是過 AB 兩點且垂直於圓周的圓弧，單位圓周就是宇宙的盡頭，永遠到不了，歐氏眼光靠近單位圓周的一小小段，對此世界的生物卻是幾億光年的遙遠路途。此幾何滿足歐式 1－4 公理，但不滿足第五公理，如圖七，過線外一點 P，存在無窮多條直線與已知直線平行（永不相交的直線）。這個世界裡，三角形內角和 < 180°（圖八），數學上稱之為 Hyperbolic Geometry



圖六



圖七



圖八
$\alpha+\beta+\gamma<180°$

4. 微積分的基石

上一節我們介紹歐氏平面幾何五大公理，那是平面幾何的基石，那麼微積分的基石又是什麼？

整本微積分最核心的定裡就是微積分基本定裡，內容如下：

第一基本定理：設 f 為定義於閉區間 $[a, b]$ 上的連續函數(continuous function)，令

$$G(x) = \int_a^x f(t)dt$$

則 $G'(x) = f(x)$

第二基本定理：設 f 在 $[a, b]$ 上連續，若存在 $F'(x) = f(x)\ \forall x \in [a,b]$，則

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$$

我們且來溯源一下，看看我們會遇到哪些問題？
首先，第一基本定理 $\Rightarrow$ 第二基本定理，理由如下：
第一 $\Rightarrow$ 第二
証：令 $G(x) = \int_a^x f(t)dt$
依第一基本定理 $G'(x) = f(x)$，故 $(G-F)'(x) = 0\ \forall x \in [a,b]$
因此，$(G-F)(x)$ 為常函數。
令 $(G-F)(x) = c\ \forall x \in [a,b]$
則 $F(b) - F(a) = G(b) - G(a) = \int_a^b f(t)dt$ □
於上述證明中，我們有如下問題：

1. f 在 $[a, b]$ 上連續，為什麼 f 在 $[a, b]$ 上黎曼可積分？
2. 第一基本定理怎麼來的？
3. 為什麼 $(G-F)'(x) = 0\ \forall x \in [a,b]$ 則 $(G-F)(x)$ 為常函數？

第一問真是大哉問，是積分的存在問題，在初微裡沒辦法回答這問題，在高微裡我們將一一把他的結解開，使你的氣能貫通天地。我姑且把它稱為微積分的督脈，此脈的打通，必須引入均勻連續的概念（uniformly continuous），可能也是兩個月以後的事了，在此先打住。

第二問是基本定理的證明問題，我姑且稱他為微積分的任脈。

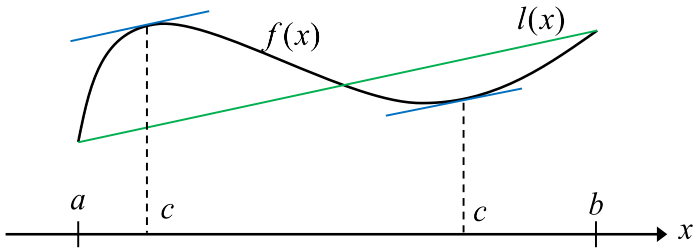
任督二脈，貫穿整個微積分核心部分，氣通了人就靈活健康，學問也是一樣，脈順暢，思想就活潑有韻，深悟三昧，能成一家之言。朱熹說：為有源頭活水來，見道心喜，何等快樂的事！

第三問：即 $\varphi'(x)=0\ \forall x\in[a,b]$ 則 $\varphi = const.$ on $[a, b]$。 此結論可由均值定理（Mean Valued Theorem）立即得到。

均值定理A：設 f 在 $[a,b]$ 上連續，在 (a,b) 上可導，則

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$$

其中 c 為 (a,b) 上某點（圖九）



圖九

根據均值定理A，

$\varphi(x)-\varphi(y)=\varphi'(z)(x-y)=0\ \forall x,y\in[a,b]$ 其中 z 為介於 x，y 之間某點。故 φ 為常函數。

微積分另一均值定理如下：

均值定理 B（積分型）：設 f 在 $[a,b]$ 上連續，則存在 $c\in(a,b)$ 使

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx = f(c)$$

現在回過頭來看第一基本定理的證明：

第一基本定理的證明：

$$G(x)=\int_a^x f(t)dt$$

$$G'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{G(x+\Delta x)-G(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\Delta x}\int_x^{x+\Delta x} f(t)dt$$

$=\lim\limits_{\Delta x\to 0} f(\xi)$　　ξ 介於 x 與 $x+\Delta x$ 之間（均值定理 B）

$=f(x)$　　（因 f 在 x 上連續，$\Delta x\to 0 \Rightarrow \xi\to x$）□

回顧之，微積分基本定理是建立在兩個均值定理上：

$$\boxed{\text{微積分基本定理}}$$

$$\Uparrow$$

$$\boxed{\text{均值定理 A， B}}$$

那麼均值定理又建立在什麼基石上？

先看定理 B 。

$$\int_a^b m dx \le \int_a^b f(x)dx \le \int_a^b M dx$$

其中 M 表 f 在 $[a, b]$ 上的最大值 $M = f(x_2)$ ，m 表 f 在 $[a, b]$ 上的最小值 $m = f(x_1)$ ，故

$$f(x_1) = m \le \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \le M = f(x_2)$$

f 在 x_1, x_2 間連續，依連續函數中間值定理，存在 c 介於 x_1, x_2 之間，使

$$f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

以上的推論中，我們用到了連續函數的兩個基本性質：

1. 中間值定理：
   f 在 $[a, b]$ 上連續，若 $f(a)f(b) < 0$，則存在 $c \in (a,b)$ 使 $f(c) = 0$
2. 最大最小值定理：
   f 在 $[a, b]$ 上連續，則 f 在 $[a, b]$ 上取最大最小值，即 $\exists x_1, x_2 \in [a,b]$ 使
   $f(x_1) \le f(x) \le f(x_2)\ \ \forall x \in [a,b]$

次看定理 A。

均值定理 B 是由 Rolle’s 定理來的（定理 B 的特例）

Rolle’s 定理：f 在 $[a, b]$ 上連續，在 (a, b) 上可導。若 $f(a) = f(b)$ ，則存在 $c \in (a,b)$ 使

$$f'(c) = 0$$

證：

f在$[a, b]$上連續，$\therefore f$ 在$[a, b]$上取最大，最小值。

令$m = f(x_1)$表最小值，$M = f(x_2)$表最大值。

(i) 若$x_1 \in (a,b)$，則x_1為f在(a, b)區間上的極小值，因此$f'(x_1) = 0$，取$c = x_1$

(ii) 若$x_2 \in (a,b)$，則x_2為f在(a, b)區間上的極大值，因此$f'(x_2) = 0$，取$c = x_2$

(iii) 若(ii)(iii)都不成立，則x_1, x_2都落在$[a, b]$的端點，而$f(a) = f(b) \therefore f(x_1) = f(x_2)$，即，f為常函數！從而$f'(x) = 0\ \forall x \in (a,b)$，取c為$(a, b)$中任意點

Rolle's 定理⇒均值定理 A

證：設$l(x)$為連接$(a, f(a))$及$(b, f(b))$的直線(見圖九)，則$l'(x) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$

令$g(x) = f(x) - l(x)$，則 g 為$[a, b]$的連續函數，g 在(a,b)上可導且$g(a) = g(b) = 0$

依 Rolle's 定理，$\exists c \in (a,b)$使$g'(c) = 0$，即$f'(c) = l'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$ □

整理之，Rolle's 定理用到了連續函數的最大最小值定理，以及極值點導數為 0 兩特性。極值點導數為 0，可由導數的定義立即得之，因此，基本上並未再引述新的定理。

故到目前為止，微積分定理的證明推到了連續函數的兩個基本定理上：

微積分基本定理

⇑

均值定理

⇑

連續函數中間值定理
及最大最小值定理

再追問下去，連續函數為什麼具有上述兩個特性，這就要落到實數的完備了。

實數的完備性：

設實數列 a_n 具有如下性質

(i) a_n 單調遞增，即 $a_n \le a_{n+1}\ \forall n$

(ii) $\{a_n\}$ 上方有界，即 $\exists k$ 使 $a_n \le k\ \forall n$

則 $\lim_{n\to\infty} a_n$ 存在於實數系中

即 $\exists l \in \mathbf{R}$ (實數系)使 $\lim_{n\to\infty} a_n = l$

上述完備性，等價於下列敘述：

實數的完備性(2)：

任意上方有界的實數集，必有上確界。

所謂上確界具二要素，

(i) 本身是個上界

(ii) 只要是上界都不會比它更小

具體表述如下：

設 $S \subset \mathbf{R}$ (實數集)，且存在 $k \in \mathbf{R}$ 使 $x \le k\ \forall x \in S$

則 $\exists x_0 \in \mathbf{R}$ 使

(i) $x \le x_0\ \forall x \in S$ (x_0 是 S 的上界)

(ii) 若 $x \le y\ \forall x \in S$，則 $y \ge x_0$ (任意上界都不會比 x_0 更小)

5. 打通任脈

上一節我們由微積分基本定理溯源到連續函數兩個基本定理：中間值定理何最大最小值定理，這樣，微積分基本定理就可上溯到實數的完備性。至於實數是什麼？為什麼它具有完備性（有理數系不具此性質），則是下一章我們要回答的內容。

由實數的完備性很容易可以得到下面的區間套定理，此定理在以下的章節裡常常會應用到，在此特別提出：

區間套定理：設 $I_n = [a_n, b_n],\ I_1 \supset I_2 \supset I_3 \supset \ldots$ 且 $|I_n| = b_n - a_n \to 0$ 當 $n \to 0$

則唯一存在一點 $x_0 \in \mathbf{R}$ 使 $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n = \{x_0\}$

證：因 $I_1 \supset I_2 \supset I_3 \supset \ldots$ 故 $\{a_n\}$ 為遞增數列，$\{b_n\}$ 為遞減數列，且 $a_n \le b_1$， $b_n \ge a_1\ \forall n$

依實數的完備性，$\lim_{n\to\infty} a_n$ 存在，令其為 a，$\lim_{n\to\infty} b_n$ 存在，令其為 b

$$b - a = \lim_{n\to\infty} b_n - \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$$

令 $x_0 = b = a$ ， 則 $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n = \{x_0\}$

□

由區間套定理很快可以得到如下定理:

Bolzano-Weierstrass 定理：

任意有界數列必含收斂子序列。

即：設 $x_n \in \mathbf{R}$ ，$|x_n| \le M\ \forall n$ ，則存在 n_k 使 $\lim_{k\to\infty} x_{n_k}$ 存在(於 $\mathbf{R}$ 中)

證：令集合 $S = \{x_n \mid n \in \mathrm{Z}\}$

(i) 若 S 為有窮集(finite set)

則數列 $\{x_n\}$ 中必有一數在數列中重複出現無窮多次，此重複出現子數列即為收斂子數列

(ii) 若 S 為無窮集

因 $\{x_n\}$ 有界，令 $S \subset [a_1, b_1]$ ，$a_1, b_1 \in \mathbf{R}$ ，並令 $I_1 = [a_1, b_1]$。 任取 $x_{n_1} \in S \bigcap I$ ，將 I_1 二等分，因 S 無窮，此二等分閉區間中必有一個含 S 無窮多元素， 令其為 $I_2 = [a_2, b_2]$ ，

$|I_2| = |b_2 - a_2| = \dfrac{b_1 - a_1}{2}$ ， 任取 $r_{n_2} \in S \bigcap I_2$ ， $n_2 > n_1$

重複上述論述於 I_2 上， 得區間 $I_3=[a_3,b_3]$， $|I_3|=|b_3-a_3|=\dfrac{b_1-a_1}{2^2}$ ，I_3 含 S 中無窮多元素，任取 $r_{n_3}\in S\bigcap I_3$， $n_2>n_1$

依此類推以致無窮，得區間套 $I_k=[a_k,b_k]$，$|I_k|=b_k-a_k=\dfrac{b_1-a_1}{2^{k-1}}\to 0$ 當 $k\to\infty$

I_n 中含 S 中無窮多元素，任取 $x_{n_k}\in S\bigcap I_k$ ， $n_k>n_{k-1}$

依區間套定理， $\exists! x_0\in \mathbf{R}$ 使 $\bigcap_{k=1}^{\infty} I_k=\{x_0\}$， 又 $x_{n_k},x_0\in I_k$

$\therefore |x_{n_k}-x_0|<|b_k-a_k|<\dfrac{b_1-a_1}{2^{k-1}}\to 0$ 當 $k\to\infty$

故 $\lim_{k\to\infty} x_{n_k}=x_0$ □

由區間套定理，我們可以導出中間值定理。

中間值定理 ： 設 f 在 $[a, b]$ 上連續，若 $f(a)f(b)<0$，則存在 $c\in(a,b)$ 使 $f(c)=0$

證:

不失一般性，設 $f(a)<0,\ f(b)>0$，

令 $I_1=[a,b]$，取 I_1 中點 m_1

若 $f(m_1)=0$ 則幸運已極，取 $c=m_1$

若 $f(m_1)>0$ 取 $a_2=a$， $b_2=m_1$ 令 $I_2=[a_2,b_2]$

若 $f(m_1)<0$ 取 $a_2=m_1$， $b_2=b$ 令 $I_2=[a_2,b_2]$

$|I_2|=|b_2-a_2|=\dfrac{b-a}{2}$

重複上述論述於 I_2，依此類推以致無窮，得區間套 $I_n=[a_n,b_n]$，$f(a_n)<0$，$f(b_n)>0$，中點 $m_n=\dfrac{a_n+b_n}{2}$

(i) 若 $f(m_n)=0$ 則定理成立， 取 $c=m_n$

(ii) 若 $f(m_n)\neq 0\ \forall n$ 則上述步驟無窮無盡， $I_1\supset I_2\supset I_3\supset\ldots$，$|I_n|=b_n-a_n\to 0$ 當 $n\to 0$

依區間套定理 $\exists! x_0\in\mathbf{R}$ 使 $\bigcap_{k=1}^{\infty} I_k=\{x_0\}$ 且 $\lim_{n\to\infty} a_n=\lim_{n\to\infty} b_n=x_0\in[a,b]$

f 在 x_0 點連續 $f(x_0)=\lim_{n\to\infty} f(a_n)\le 0$

$$=\lim_{n\to\infty} f(b_n)\ge 0$$

故 $f(x_0)=0$

取 $c=x_0$ 得證 □

由 Bolzano-Weierstrass 定理可得最大最小值定理。我們先導出一個引理(Lemma)

引理：f在$[a, b]$上連續，則f必為有界函數
即：$\exists M$ 使$|f(x)| \le M \; \forall x \in [a,b]$
證：我們只需證明f上方有界
若不然，$\forall n \; \exists x_n \in [a,b]$使$f(x_n) \ge n$。$\{x_n\} \subset [a,b]$，依 Bolzano-Weierstrass 定理，$\{x_n\}$有收斂子序列$\{x_{n_k}\}$ $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = x_0 \in \mathbf{R}$。
$x_{n_k} \in [a,b]$，$\therefore x_0 \in [a,b]$(開區間無此性質)
f 在x_0點連續$x_{n_k} \to x_0$故$f(x_0) = \lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) \ge \lim_{k\to\infty} n_k = \infty$
違背了函數值必為有窮實數(finite real valued)的定義 □

最大最小值定理：設f在$[a, b]$上連續，則f在$[a, b]$上取最大最小值，即$\exists x_1, x_2 \in [a,b]$使

$$f(x_1) \le f(x) \le f(x_2) \; \forall x \in [a,b]$$

證：f的最小值即$-f$的最大值，因此我們只需證 f取最大值即可。
依 Lemma，集合$S = \{f(x) \mid x \in [a,b]\}$上方有界。根據實數的完備性，S 有上確界 M。
我們想證這上確界確實被 f 取到。
想法：M 為 S 的為小上界$\therefore M - 1/n$非 S 上界$\forall n$。
$M - 1/n$既非 S 上界，因此$\exists x_n \in [a,b]$使$f(x_n) > M - 1/n$
$\{x_n\} \subset [a,b]$，依 Bolzano-Weierstrass 定理，$\{x_n\}$有收斂子數列$\{x_{n_k}\}$，$\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = x_0 \in \mathbf{R}$
[a, b]為閉區間，$x_0 \in [a,b]$。又 f 在x_0連續，$x_{n_k} \to x_0$
$\therefore f(x_0) = \lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) \ge \lim_{k\to\infty} M - 1/x_{n_k} = M$
但$f(x_0) \le M$，故$f(x_0) = M$ □
M果然被 f 取到了！

我們把上兩節的推導作一簡圖表如下:

微積分基本定理

⇑

均值定理

⇑

連續函數中間值定理
及最大最小值定理

⇑

Bolzano-Weierstrass 定理及
區間套定理

⇑

實數的完備性

此一脈絡，我且稱之為微積分的任脈，至此打通，至於另一脈，積分的存問題，要等到介紹均勻連續概念後再來打通。

下一章我們將探討實數是什麼？為什麼它具有完備性？（有理數系坑坑洞洞，不具完備性）從有理數到實數到底塞進多少東西？這一連串的問題導出新的思維，
許多睿智英才將站上歷史舞台，寫下近代數學思想史波瀾壯闊的一章。

8. 實數完備性與極限

我們先來看看下面這個例子。

例：求 $\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{\dots}}}}$ 之值。

這是一個在國中時代的典型數學問題，參考書上的解法大概是這樣：令 $x = \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{\dots}}}}$ 則 $x^2 = 2\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{\dots}}} = 2x$ 移項得 $x^2 - 2x = 0$ 或 $x(x-2) = 0$ $x > 0 \therefore x = 2$ 真是妙解，那時無不讚嘆。現在我們來問幾個問題：

1. $\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{\dots}}}}$ 是什麼意思？

2. 怎麼可以令 $x = \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{\dots}}}}$，它存在嗎？

你不要怪我無事找事，有人告訴我他證明 1 是最大正整數，理由如下：

設 n 為最大正整數：n 為整數，$\therefore n^2$ 也是整數 n 是最大正整數，$\therefore n^2 \le n$ 移項分解後得 $n(1-n) \ge 0$ $n > 0 \therefore 1 - n \ge 0$ 故 $n \le 1$ 而 1 為正整數，$\therefore n = 1$

上面的推論，邏輯上無暇，但結論則荒唐，問題出在哪裡？出在最大正整數並不存在－－事實上，天底下沒這件事。數學上接受這樣的邏輯：　　假設非真，則不論結論為何，論述成立。既然說不清 $\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{\dots}}}}$ 是什麼意思，又假設它的存在，則解出 $x = 2$ 是靠不住的阿！那麼到底該怎麼辦？這是一個極限問題，應該回到數列上來討論。

正確的提問：設 $a_1 = \sqrt{2}$, $a_2 = \sqrt{2\sqrt{2}}, \dots$ $a_{n+1} = \sqrt{2a_n \dots}$ (i) $\lim_{n\to\infty} a_n$ 存在否？(ii) 如存在，其值為何？解：(i) $\sqrt{2} < \sqrt{2\sqrt{2}} < \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}} \dots$ 故 $a_1 < a_2 < \dots$ 又 $a_1 = \sqrt{2} < 2$, $a_2 = \sqrt{2\sqrt{2}} < \sqrt{2\cdot 2} = 2$, $a_3 = \sqrt{2a_2} < \sqrt{2\cdot 2} = 2 \dots$ 依歸納法，得 $a_n < 2 \forall n$ 因此，$\{a_n\}$ 為一遞增數列，且上方有界。依實數完備性，$\lim_{n\to\infty} a_n$ 存在 (ii) 令 $x = \lim_{n\to\infty} a_n$ 由 $a_{n+1} = \sqrt{2a_n}$, 令 $n \to \infty$ 得 $x = \sqrt{2x}$ 或 $x^2 - 2x = 0$ $x \ne 0 \therefore$ $x = 2$

例：e 的誕生

在金融上，複利的滋生和現有本金成正比。在自然界，很多事物的變率和現有事物的總量呈一定的比例關係，在生物學上菌口的成長速度和現有菌口成正比，在化學上放射元素的衰變速度和現有物質的質量成正比。若以 x 表時間，$f(x)$ 表 x 時刻該物質的總量，則

$$f'(x) \propto f(x)$$

或 $f'(x) = kf(x)$, k 為常數我們要問 f 是什麼樣的函數？先考慮最簡單的情形，$k = 1$

$$f'(x) = f(x)$$

即

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=f(x) \qquad\qquad (*)$$

在已知的多項式函數，三角函數裡都找不到滿足上方程式的函數，試指數函數如何？設 $f(x)=a^x$ 代入 (*) 式得

$$\lim_{h\to 0}\frac{a^{x+h}-a^x}{h}=a^x$$

或

$$\lim_{h\to 0}\frac{a^h-1}{h}=1$$

這樣的 a 存在嗎？如果存在的話，$\frac{a^h-1}{h}\ \sim 1$ 當 h 很小，或 $a\sim\ (1+h)^{1/h}$ 當 h 很小（這裡 $\sim$ 代表很接近的意思）

問：$\lim_{h\to 0}(1+h)^{1/h}$ 存在嗎？

這還是不容易回答，再問更簡單一點的好了，考慮 $h=\frac{1}{n}$，n 為自然數

問：$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n$ 存在嗎？

這是微積分裡面一個重要的極限問題，其解如下:

解：令 $a_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ 依二項定理

$$\begin{aligned}a_n=&1+n\cdot\frac{1}{n}+\frac{n(n-1)}{2!}\frac{1}{n^2}+\frac{n(n-1)(n-2)}{n^3}+...\\=&1+1+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)+...\end{aligned}$$

於是

$$a_{n+1}=1+1+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)+...$$

$\frac{i}{n}>\frac{i}{n+1}$, $i=1,2,3...$

故 $a_n<a_{n+1}$

又 $1-\frac{i}{n}<1$

$$\therefore a_n<1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+...+\frac{1}{n!}\ \ <1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+...+\frac{1}{2^{n-1}}<2+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}=3$$

即：a_n 為遞增數列，且上方有界。依實數的完備性，$\lim_{n\to\infty}a_n$ 存在，以 e 來表示它

$$e=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

這是新發現的一個無理數，它的近似值大約是

2.71828 18284 59045 23536 02874 71352 66249 77572 47093 69995...(前 50 位小數) 這些數字到底如何分佈，是現代數論的一個課題。至於 $f(x)=e^x$ 則 $f'(x)=f(x)$，留到指數函數與對數時再來證明它。

9. 電腦的出現

電腦的出現，對人類生活方式的運作既深且廣，許多以前不可能的事，如今都變成可能，資訊傳遞的迅速，讓整個地球個地球變成一個村莊。

在第三節裏，我們談到數學的本質。數學中的定理是建立在公理系統上，經過「有窮」步驟 (finite steps) 的邏輯推演而得到。我們常見的定理推演有幾步的，十幾步的，幾十步的，上百步的就很少見。但吾生也有涯，而有窮可以接近無涯，如果一個定理的證明需要一億步的邏輯推演，以每分鐘一步，了無障礙，直達終點來估算，則至少需要 190 年，一個人三輩子無休無眠努力工作，也證不了它。何況下輩子未必記得住這輩子的事，就算你天生異秉，能夠乘願而來，繼願而去，完成偉大志業，也不會有人肯賣命來讀你的論文，欣賞你的傑作。

你可能被當成瘋子，成為大家取笑的對象。

數學上有一個著名的問題叫四色問題，1852 年英國一位製圖員 F. Guthrie 發現要把一張地圖上色，相鄰兩國塗上不同顏色，至少需要四個顏色，這個問題在數學界流傳，就是有名的四色問題。

百餘年來，不知多少人想證明它，沒有一人成功，直到電腦的出現。

1976 年，K.Appel 和 W.Haken 兩人把一切地圖，分類成 1936 種情況，由電腦去跑。跑出來的結果，顯示四色足夠用。這給數學界帶來前所未有的衝擊！

這算證明嗎？許多人提出這樣的質疑。

此後，有人把問題簡化成 633 種情況，但是還是必須借助電腦的幫忙。

這 633 種情況，可不可以由人來操作證明？可以，不過要好幾輩子！

當有窮對人類數十年的短暫生命成為無涯，借助電腦以縮短時間，乃成為必要的手段，問題是你必須相信電腦，相信那程式設計。

信或不信，人類必須做一個選擇！

電腦可以下西洋棋，打敗世界棋王。但電腦不能替你談戀愛，不能替你讀書，不能替你決定你要讀哪一科系。

時下有人想要用電腦來評閱作文，我以為是把電腦用錯方向，自己本來是電腦的主人，反而要用電腦來框限自己。事物一但被制式化，生命力就不見了，取而代之的是一堆電腦作文參考書，框殺了年輕的靈魂。

另一個著名的問題是 Riemann Zeta hypothesis。Riemann 在研究數論的時候，引進如下函數：

$$\zeta(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^z}=\frac{1}{1^z}+\frac{1}{2^z}+\frac{1}{3^z}+\cdots\quad z \text{ 為複數，} z\neq 1$$

此級數在 $\mathrm{Re}(z)>1$ 領域上絕對收斂，且在五領域上解析（analytic）。他可以解析研拓到整個複數平面，除了 $z=1$ 這個點例外。

絕對解析研拓後的 ζ 函數滿足方程式

$$\zeta(z)=2^z\pi^{z-1}\sin\left(\frac{\pi z}{2}\right)\Gamma(1-z)\zeta(1-z)$$

其中 Γ 表 Gamma function. 因此當 $z=-2k,\ k=1,2,\cdots$ 時 $\zeta(z)=0$。這些稱為 $\zeta(z)$ 的 trivial zeros.

1859 年，Riemann 計算它的幾個 non-trivial zeros，發現它們的實部（real part）都是 $\frac{1}{2}$，於是提出猜測：

「所有 $\zeta(z)$ 的 non-trivial zeros 都落在 $\mathrm{Re}(z)=\dfrac{1}{2}$ 這條直線上。」

這便是著名的 **Riemann zeta hypothesis**。

Hilbert 在 1900 年第一屆國際數學會議上提出影響 20 世紀數學發展甚深的 23 個問題，將 Riemann zeta hypothesis 列為第 8 個問題，是少數幾個至今仍未解決的問題之一。

早期的數學家徒手檢驗 $\zeta(z)$ 的根，從最初 3 個，15 個，79 個，138 個，195 個，到 1041 個（1936，Titchmarsh）都驗証了 Riemann 的推測沒錯，之後電子計算器出現，繼之高速電腦的誕生，使檢驗工作更快速，其工作遠非徒手操練所能及。截至 2004 年止，有人檢驗了前 10^{13} 個根（$z=\frac{1}{2}+ik,\ k\sim 10^{24}$）都支持 Riemann 的猜測。

目前高速電腦仍日夜不停地在跑，一旦發現 Riemann 的猜測錯了，電腦就會自動停止運算，至今未聞電腦停工，想來 Riemann 的猜測仍然屹立不墜。

1998 年，Clay 家族成立基金會，提出設立 Millennium Prize Problems，仿效 Hilbert 的 23 問，他們提出七大問題：

1. P versus NP problem
2. Hodge Conjecture
3. Poincaré Conjecture
4. Riemann zeta hypothesis

5. Yang-Mills existence and mass gap

6. Navier-Stokes existence and smoothness

7. Birch and Swinnerton-Dyer Conjecture

獎金 100 萬美元。

獎金事小，但是一個成功的企業家願意提供金錢支持學術的發展，營造探索真理的社會氣氛，其情高貴，其襟寬闊，令人尊敬。

Perelman 於 2003 年發表論文，解決了 Poincaré Conjecture，2006 年國際數學大會頒發 Fields Medal 給他，但他並沒有前往領獎，他說道：

“ I am not interested in money or fame,
I don’t want to be on display like an animal in a zoo.”

2010 年 Clay 基金會頒發 Millennium Prize 及 100 萬美金給他，他也沒去領獎，他說：

“The contribution of me to this problem is no greater than that of R. Hamilton”

Hamilton 是 Coulombia 大學教授，目前仍建在，是 Ricci flow 的開拓者。他用 Ricci flow 來研究 Poincaré Conjecture，遇到一些困難；Perelman 延續他的研究，終於看見了曙光。

Science 雜誌把 Poincaré Conjecture 的解決選為 2006 年的 “Breakthrough of the year”，是該雜誌創立以來第一次對數學研究的高度肯定。

中國人尊敬一個人說：道在其身。

它出現在 Saint Petersburg。

至於領那個獎是否就是 be on display like an animal in a zoo ？仁者樂山，智者樂水，無關是非。

第一章　範例與習題

範例

1. $e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots$

證：$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$ 為一收斂級數（Convergent Series）。

$e = \lim_{n\to\infty} a_n$

$$\begin{aligned} a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n &= 1 + 1 + \frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right) + \cdots \\ &+ \frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n}\right) \qquad (1) \\ &< 1 + 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n!} < \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!} \end{aligned}$$

$$\therefore e = \lim_{n\to\infty} a_n \le \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!} \qquad (2)$$

又固定 $k < n$，於 (1) 式中我們有

$$a_n > 1+1+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)+\cdots+\frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)$$

上式中令 $n \to \infty$，我們有

$$e = \lim_{n\to\infty} a_n > 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{k!}$$

上式對一切 k 均成立，故

$$e \ge \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!} \qquad (3)$$

由 (2),(3) 得

$$e = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}$$

據此，可證明 e 為無理數，留作習題。

2. Fibonacci 數列

$\{a_n\} = \{1, 1, 2, 3, 4, 8, 13, 21, 34, \cdots\}$ $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$ 稱為 Fibonacci 數列

令 $x_n = a_{n+1}/a_n$，於是

$\{x_n\} = \{1, 2, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \frac{8}{5}, \frac{13}{8}, \frac{21}{13}, \frac{34}{21} \cdots\}$

試證：$\lim_{n\to\infty} x_n$ 存在，並求其值。

分析：

(i) $a_n < a_{n+1}$, $x_n = \frac{a_n+a_{n-1}}{a_n} < \frac{a_n+a_n}{a_n} = 2$

$\therefore$ 數列 $\{x_n\}$ 上方有界

(ii) 觀察數列 $\{x_n\}$，既非遞增，也非遞減，在那裡跳來跳去，怎麼辦？

不過再仔細觀察，奇數項

$$1, \frac{3}{2}, \frac{8}{5}, \frac{21}{13}, \cdots \text{ 似乎是遞增的}$$

偶數項

$$2, \frac{5}{3}, \frac{13}{8}, \frac{34}{21}, \cdots \text{ 似乎是遞減的}$$

好像露出一線曙光。真是這樣嗎？且來研究一下：由 $x_n = \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{a_n+a_{n-1}}{a_n} = a + \frac{a_{n-1}}{a_n} = 1 + \frac{1}{x_{n-1}}$ 及 $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = \frac{3}{2} > x_1$ 得

$$x_4 = 1 + \frac{1}{x_3} < 1 + \frac{1}{x_1} = x_2$$
$$x_5 = 1 + \frac{1}{x_4} < 1 + \frac{1}{x_2} = x_3$$
$$x_6 = 1 + \frac{1}{x_5} < 1 + \frac{1}{x_3} = x_4$$
$$x_7 = 1 + \frac{1}{x_6} < 1 + \frac{1}{x_4} = x_5$$
$$\cdots$$

依此類推，以致無窮，得數列

$$\{x_1.x_3, x_5, x_7, \cdots\} \text{ 為遞增數列}$$
$$\{x_2.x_4, x_6, x_8, \cdots\} \text{ 為遞減數列}$$

依實數的完備性，存在 $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ 使 $\lim_{n\to\infty} x_{2n+1} = \alpha$, $\lim_{n\to\infty} x_{2n} = \beta$

(iii) $\alpha = \beta$?

由 $x_{2n+1} = 1 + \frac{1}{x_{2n}}$ 及 $x_{2n} = 1 + \frac{1}{x_{2n-1}}$，分別令 $n \to \infty$，得 $\begin{cases} \alpha = 1 + \frac{1}{\beta} \\ \beta = 1 + \frac{1}{\alpha} \end{cases}$，或

$$\begin{cases} \alpha\beta = \beta + 1 \\ \beta\alpha = \alpha + 1 \end{cases}$$

知 $\alpha = \beta$。故 $\lim_{x\to\infty} x_n$ 存在 $= \alpha$

(iv) $\alpha = ?$

由 $x_{n+1} = 1 + \frac{1}{x_n}$，令 $n \to \infty$ 得 $\alpha = 1 + \frac{1}{\alpha}$，或 $\alpha^2 - \alpha - 1 = 0$，解之得

$$\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

這個數正是黃金分割。希臘是個很獨特的民族，長方形就是長方形，他們偏要問：什麼樣的長方形最美？他們的結論是：當「全段（兩段和）: 大段 = 大段: 小段」，以此兩段為長方形之邊長時最美，於是得到著名的黃金分割。Fibonacci 數列的後項比前項會趨近於黃金分割，希臘人大聲叫好！他們的美學觀深植西方文明，我在這裡不禁要問：希臘，你們是不是著相了一點？

Fibonacci 數列在生物，幾何，甚至財經上都有它的蹤跡，而數列中的質數：1,2,3,5,13,89,$\cdots$ 到底有窮抑無窮，依然是個未知的問題。

一百零一學年度 數學系高等微積分 (上) 習題一

2012.09.20

範圍: 第一章

1. 請說明「$i < 2i$」有何不妥？

2. 人類觀察自然現象，如太陽、滿月、漣漪等而定義出「圓」這個概念，請問自然界中有圓存在嗎？

3. 古人說「白馬非馬」，試闡其義。

4. 過相異兩點可連一直線，請問此直線是否唯一？試就下列三種幾何分別討論之：

   (a) 歐氏平面幾何

   (b) 球面幾何

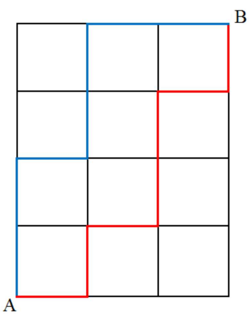
   (c) Poincaré model

5. (a) 在歐氏平面幾何中，兩三角形 ΔABC 及 $\Delta A'B'C'$，若 $\overline{AB} = \overline{A'B'}$、$\overline{BC} = \overline{B'C'}$、$\angle ABC = \angle A'B'C'$，則此二三角形全等 (S.A.S 全等)。在證明過程中，用到哪些公理？

   (b) 此定理在球面幾何上成立嗎？

   (c) 在 Poincare Model 中成立嗎？

6. (Texicab Geometry) 在無垠的平面方格點上，每個方格長度都是 1，過 A、B 二點的直線為連接 A、B 兩點最短的路徑。若 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$，則 $d(A, B) = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|$，其中 x_i, y_i 為整數，$i = 1, 2$。



計程車在街道上行駛，將連接A,B兩點間的最短路徑都叫直線（如紅色與藍色）

   (a) 試說明此幾何為一種非歐幾何。

   (b) 歐式幾何第四公里：「凡直角皆相等」在此幾何中還成立嗎？

   (c) 給定 A 點，試以 A 為心作半徑分別為 1、2、3 的圓。

(d) 給定 $A(0,0)$、$B(0,3)$ 兩點，分別以半徑 2 作二圓 Γ_A 及 Γ_B，問：Γ_A 與 Γ_B 是否必交於二點？

(e) 上題中兩三角形全等定理 (S.A.S) 在此還成立嗎？

7. 已知 $\sqrt{2}$ 為無理數，試証：任意二有理數之間必存在無理數。

8. 請舉一例說明有理數系不具完備性。

9. 在邏輯上，前提非真，則不論結論為何，命題恆成立。「空集合 ϕ 包含於任意集合」即根據此邏輯證得，理由如下：
設 S 為任意集合，若 $x \in \phi$(非真！因中不含任何元素)，則 $x \in S$。上面論證在邏輯上成立，所以 $\phi \subset S$。
然而，我們也可以說：若 $x \in \phi$，則 $x \notin S$，上面論證在邏輯上亦成立。所以 $\phi \not\subseteq S$。
請問問題出在哪裡？

10. 請寫出下列敘述的否定命題。

(a) 只要我有錢，我就可以叫鬼推磨。

(b) 有一首歌，不論何時何地，戀愛中的情人要分別時，聽到它都會落淚。

(c) 對任意 $\epsilon > 0$，恆存在 $\delta > 0$，使得 $|f(x)-l| < \epsilon$，當 $|x-a| < \delta$。(「$\lim_{x\to a} f(x) = l$」在數學上的定義)

(d) 對任意 $\epsilon > 0$，恆存在自然數 N 使得 $|a_n - l| < \epsilon$ 當 $n > N$。(「$\lim_{n\to\infty} a_n = l$」在數學上的定義)

(e) 對於所有 $\epsilon > 0$，存在 δ(只與 ϵ 有關，與 x, y 無關) 使得 $|f(x) - f(y)| < \epsilon$ 當 $|x - y| < \delta$，$x, y \in [a, b]$。(f 在 $[a, b]$ 上均勻連續的定義)

11. f 在 $[a, b]$ 上連續，$f(a) > a$，$f(b) < b$。試證：$\exists c \in (a, b)$ 使得 $f(c) = c$。

12. $\Gamma = \{(x, f(x)) | x \in [a, b]\}$，$f$ 為定義在 $[a, b]$ 上的連續函數。我們說 Γ 有水平弦，長度為 l，若 $\exists x \in [a, b]$ 使 $f(x + l) = f(x)$，$x + l \in [a, b]$。設 f 為定義在 $[0, 1]$ 上的連續函數，$f(0) = f(1)$。試證：對任意自然數 n，f 恆有長度為 $\frac{1}{n}$ 的水平弦。

13. 給定 $0 < a < b$，令 $a_1 = a$，$b_1 = b$，$a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}$，$b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}$。試證：$\lim_{n\to\infty} a_n$ 與 $\lim_{n\to\infty} b_n$ 存在且相等。

14. 設 $\mathbf{x} = (x_1, x_2), \mathbf{y} = (y_1, y_2)$ ，$|\mathbf{x} - \mathbf{y}| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$ 。我們說數列 $\{\mathbf{x}_n\} = \{(x_{1,n}, x_{2,n})\}$ 收斂到 $\mathbf{x}_0 = (x_{1,0}, x_{2,0})$ ，表示 $|\mathbf{x}_n - \mathbf{x}_0| \to 0$ 當 $n \to \infty$ 。

(a) 試證：$\mathbf{x}_n \to \mathbf{x}_0 \Leftrightarrow x_{1,n} \to x_{1,0},\ x_{2,n} \to x_{2,0}$

(b) 二維 **Bolzano-Weierstrass** 定理：設 $\{\mathbf{x}_n\}$ 為 $\mathbb{R}^2$ 之有界點列，則 $\{\mathbf{x}_n\}$ 有收斂子點列。試證之。

(c) 試敘述 $\mathbb{R}^n$ 中的 **Bolzano-Weierstrass** 定理，並證明之。

15. 你看過太極圖嗎？太極圖中有陽魚、陰魚，二者是對偶關係，各佔太極圖的一半領域，形狀完全相同。在單位球面上，討論以歐氏幾何中的大圓為直線的幾何，稱為球面幾何。今有三角形 $\triangle ABC$ ，三內角（切線的夾角）分別為 $\angle A,\ \angle B,\ \angle C$ 。聰明的 Gauss 利用如下的觀察得到

$$\angle A+\angle B+\angle C=\pi+\alpha,\quad \alpha \text{ 為 } \triangle ABC \text{ 的球面面積}$$

(i) 過南北二極，交角為 θ 的二直線（經線），其所圍面積為 $\dfrac{\theta}{2\pi}\cdot 4\pi=2\theta$

(ii) 延長 $\overset{\frown}{\mathrm{AB}}, \overset{\frown}{\mathrm{AC}}$ 使相交於 A' 點。若把 A 當北極，A' 就是南極。因此，此二直線所圍領域可求。

(iii) 同理，延長 $\overset{\frown}{\mathrm{BA}}, \overset{\frown}{\mathrm{BC}}$ 使相交於 B' 點，延長 $\overset{\frown}{\mathrm{CA}}, \overset{\frown}{\mathrm{CB}}$ 使相交於 c' 點。

並把 (ii), (iii) 延長所得領域標上斜線。令其為 $\mathcal{S}$

(iv) A', B', C' 分別為 A, B, C 的對偶點。因此 $\triangle A'B'C'$ 與 $\triangle ABC$ 無異。

對 $\triangle A'B'C'$ 進行 (ii), (iii) 的延拓，得到 $\mathcal{S}'$ 。

(v) $\mathcal{S}$ 好比太極圖中的陽魚，$\mathcal{S}'$ 好比太極途中的陰魚。因此二者全等，各佔球面積的一半。

聰明的你，請導出 Gauss 的公式。（建議：拿一個籃球實際畫一畫。）

16. (a) $a_n=(1+\dfrac{1}{n})^n$ 的遞增性可由如下觀察得之：考慮 $n+1$ 個數，

$$1,(1+\frac{1}{n}),(1+\frac{1}{n}),\ldots,(1+\frac{1}{n})$$

由算術平均大於幾何平均，即得。

(b) 令 $b_n=(1+\dfrac{1}{n})^{n+1}$，試仿 (a) 證明 $b_n\downarrow e$ strictly

17. (a) 由 $\lim_{n\to\infty}(1+\dfrac{1}{n})^n=e$，$n$ 為自然數。導出 $\lim_{x\to\infty}(1+\dfrac{1}{x})^x=e$，$x$ 為實數 (提示：找最靠近 x 的自然數 n，$n\le x<n+1$，逼出極限來。)。從而 $\lim_{h\to 0+}(1+h)^{\frac{1}{h}}=e$。

(b) 試證：$\lim_{n\to-\infty}(1+\dfrac{1}{n})^n=e$ 仍然成立，導出 $\lim_{x\to-\infty}(1+\dfrac{1}{x})^x=e$ 成立，從而 $\lim_{h\to 0-}(1+h)^{\frac{1}{h}}=e$ 亦成立。