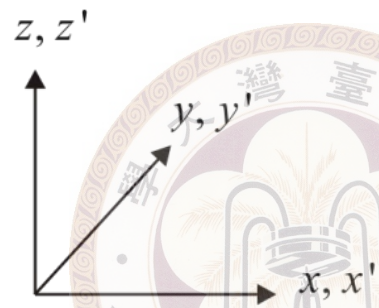
勞倫茲變換的證明

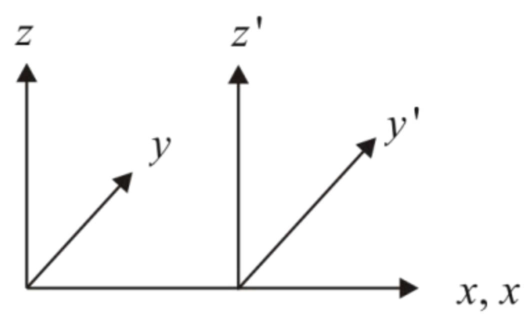
張海潮教授

假設火車本身是火車的 x' 軸，鐵軌是月台的 x 軸，火車沿鐵軌向右進行，因此 x 軸和 x' 軸重合。

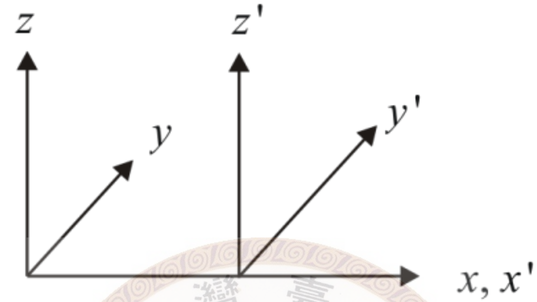
假設在 $t=t'=0$ 時，兩者的原點 $(0,0,0)$ 和 $(0',0',0')$ 重合，並且 y 和 y' 軸，z 和 z' 軸也重合。



在下一時刻



由於在 $t=0=t'$ 時兩者三軸重合，因此在下一時刻，y 和 y' 軸，z 和 z' 軸保持平行。



原因：就月台來看，$y'z'$ 平面和 x' 軸垂直，而 x 和 x' 軸重合，因此就月台來看，

如果 $y'z'$ 面和 x 軸不垂直的話，$y'z'$ 面和 x 軸就會有一個傾斜，但是空間無法自己

選擇這個傾斜的方向。

既然 $y'z'$ 面保持與 yz 面平行，那麼 y' 和 y 如果不平行的話，同理，就月台來看，

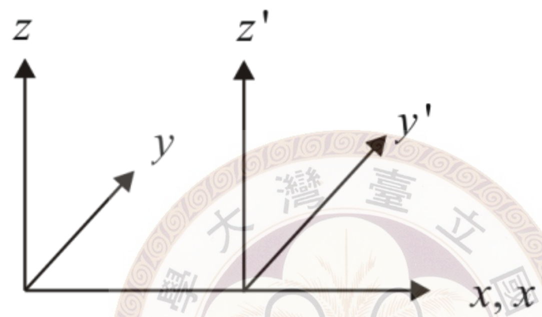
代表 $y'z'$ 面在空間進行了一個旋轉，但是空間無法自己選擇這個旋轉的方向。

愛因斯坦在六月論文中說

From reasons of symmetry we are entitled to assume that the motion of k may be such that axes of the moving system are at the time t (this “t” always denotes a time of the stationary system) parallel to the axes of the axes of the stationary system.

※文中 k (moving system)指火車，stationary system 指月台。

既然 y', z' 保持與 y, z 平行，在兩個系統中 xz 平面即 $x'z'$ 平面；



由於這兩個平面的方程式分別是 $y=0$ 和 $y'=0$，所以

在坐標轉換時　$y=dy'$

由於空間的對稱，d 必須為 1；同理，$z'=z$。

此外，$x'=0$代表火車的 $y'z'$平面，我們已經看到這個平面與 yz平面平行，因此 $x'=0$和 $x-vt=0$定義了 $y'z'$平面，所以在坐標轉換時，$x'=e\cdot(x-vt)$，e是一個待定的常數。我們因此有：

$$x'=e\cdot(x-vt)$$

$$y'=y$$

$$z'=z$$

至於 t'，暫時假設 $t'=at+bx+ly+mz$。

$$y' = y$$

$$z' = z$$

$$t' = at + bx + ly + mz$$

我們注意到 $y, z\ (y', z')$ 的選擇是任意的，所以我們可以另選

$$\begin{aligned} Y &= z \\ Z &= -y \end{aligned} \quad \text{以及} \quad \begin{aligned} Y' &= z' \\ Z' &= -y' \end{aligned}$$

仍然維持 $Y' = Y, Z' = Z$，但是

$$t' = at + bx - lZ + mY$$

與原來 t' 的形式比較，得到 $m = l$ 和 $-l = m$，亦即 $m = l = 0$

我們因此得到勞倫茲變換的一個特定形式：

$$x' = e \cdot (x - vt)$$

$$t' = at + bx$$

$$y' = y$$

$$z' = z$$

我們此後先忘了 $y, z\ (y', z')$ ，並且尊重光速不變原理，以 $x - ct, x + ct$ 和 $x' - ct', x' + ct'$ 作為新的變數，顯然

$$x' - ct' = A \cdot (x - ct)$$

$$x' + ct' = B \cdot (x + ct)$$

我們要決定 A, B 。先將 $x' = 0$ ， $x = vt$ 代入得到

$$-ct' = A \cdot (v - c)t$$

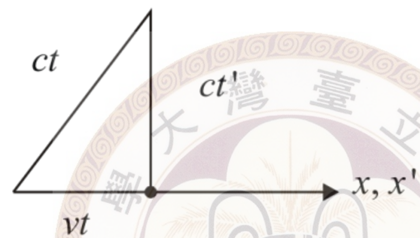
$$ct' = B \cdot (v + c)t$$

兩 式 相 比 ， 得 到 $A/B = (c + v)/(c - v)$

$$x' - ct' = A \cdot (x - ct)$$
$$x' + ct' = B \cdot (x + ct)$$

兩者相乘 $$(x')^2 - c^2(t')^2 = AB(x^2 - c^2t^2)\cdots(1)$$

現在假設火車向 $y\,(y')$ 方向放一束光，由光速不變原理，t 時刻之後，月台所見：



圖中 ct 是月台所見光的路徑，ct' 是火車所見，vt 是火車與月台的距離，由畢氏定理， $c^2t^2 = c^2(t')^2 + v^2t^2$

但是在(1) 中以 $\boldsymbol{x' = 0, x = vt}$ 代入，

所以(1)：$-c^2(t')^2 = AB(v^2 - c^2)t^2$ 由畢氏定理得 $AB = 1$

由前，一方面得 $A/B = \dfrac{c+v}{c-v}$

另一方面 $AB = 1$

解得 $A = \sqrt{\dfrac{c+v}{c-v}}\,,\; B = \sqrt{\dfrac{c-v}{c+v}}$

而勞倫茲變換：

$$x' - ct' = \sqrt{\frac{c+v}{c-v}} \cdot (x - ct)$$

$$x' + ct' = \sqrt{\frac{c-v}{c+v}} \cdot (x + ct)$$

兩式相加減除以 2 和 $2c$，分別得到

$$x' = (x - vt) \Big/ \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

$$t' = (t - \frac{v}{c^2}x) \Big/ \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

我們得到了勞倫茲變換的一個特殊形式：

$$x' = (x - vt) \Big/ \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

$$t' = (t - \frac{v}{c^2} x) \Big/ \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

$$y' = y$$

$$z' = z$$

我們注意到這個公式成立的幾個原因：

(1)相對性原理保證這個變換是線性的

(2)空間本身的對稱性簡化了這個變換的形式

(3)光速不變原理確定了 x, t 的係數。