**進階電磁學**

**課程筆記**

**第4-2講、**

**Ch13 Magnetostatics（靜磁學）2**

授課教師：台灣大學物理系　易富國教授
筆記編寫：台灣大學物理系　曾芝寅助理
編者信箱：r01222076@ntu.edu.tw
上課學期：100學年度第一學期


本著作係採用[創用 CC 姓名標示-非商業性-相同方式分享 3.0 台灣 授權條款](http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/3.0/tw/deed.zh_TW)授權.

**電場與磁場的相對性 (Relativity of Magnetic and Electric Fields)**

愛因斯坦的化有為無：站在磁鐵的坐標系，電場就沒有了。

(廣義相對論的精神雷同，站在加速物體的坐標系之下，重力就消失了。)

*S*

*N*

$$磁力線\vec{B}$$

$$-\vec{v}$$

$$O\left(\vec{B}\ne 0,\vec{E}\ne 0\right)$$

*S*

*N*

$$磁力線\vec{B}$$

$$\vec{v}$$

$$O'\left(\vec{B}'\ne 0,\vec{E}'=0\right)$$

以上請參考普通物理學甲下，法拉第感應定律至特殊相對論等單元。

**費曼的把戲：無中生有**

$$\vec{v}$$

$$S\left(\vec{B}=\frac{2\left|\vec{J}\right|A}{4πϵ\_{0}c^{2}r}\vec{e\_{ϕ}},\vec{E}=0\right)$$

$$ρ\_{+}$$

$$ρ\_{-}$$

$$\vec{v}\_{0}$$

$$q$$

$$\vec{F}$$

$$\vec{J}$$

$$\vec{B}$$

$$A$$

電流線中有正、負電荷 $ρ\_{+}$、$ρ\_{-}$，電荷密度平衡 $\left(ρ\_{+}+ρ\_{-}\right)=0$

其速度分別為 $v\_{+}=0$ 、 $v\_{-}=v$ ，故電流密度 $\vec{J}=ρ\_{-}\vec{v}$

旁有測試電荷 $q$，運動速度 $\vec{v}\_{0}$、$\left|\vec{v}\_{0}\right|=v$

測試電荷 $q$ 受磁力作用向下：

$$\left|\vec{F}\right|=q\left|\vec{v}\_{0}×\vec{B}\right|=q\left|\vec{v}\_{0}\right|\frac{2\left|\vec{J}\right|A}{4πϵ\_{0}c^{2}r}$$

接著到測試電荷上看：

$$-\vec{v}$$

$$S^{'}\left(\vec{B}^{'},\vec{E}^{'}\ne 0\right)$$

$$ρ\_{+}^{'}$$

$$ρ\_{-}^{'}$$

$$\vec{v}\_{0}^{'}=0$$

$$q$$

$$\vec{F}^{'}$$

$$\vec{J}^{'}$$

$$\vec{B}^{'}$$

$$A^{'}$$

電荷 $q$ 速度為零，受力不為磁場作用，那麼必然是**電場作用** (哪來的電場?)

$$\vec{F}^{'}=q\vec{E}^{'}$$

利用**相對論**中的**長度收縮** (length contraction)，電線截面積不變 $A^{'}=A$，而沿著移動速度方向，電線長度縮短 $dx\ne dx^{'}$。

電荷量不隨坐標系變化，

$$ρdxdydz=dq=dq^{'}=ρ^{'}dx^{'}dy^{'}dz^{'}$$

 而

$$dy=dy^{'}, dz=dz^{'}$$

* 正電荷 $ρ\_{+}$ 在 $S$ 中靜止， 在 $S'$ 中以速度 $-v$ 運動，

$$ρ\_{+}^{'}=\frac{ρ\_{+}}{\sqrt{1-\left(-v\right)^{2}/c^{2}}}=\frac{ρ\_{+}}{\sqrt{1-v^{2}/c^{2}}}$$

* 負電荷 $ρ\_{-}$ 在 $S$ 中以速度 $v$ 運動， 在 $S^{'}$ 中靜止，

$$ρ\_{-}=\frac{ρ\_{-}^{'}}{\sqrt{1-v^{2}/c^{2}}}$$

在 $S^{'}$ 中**電荷密度不平衡**

$$ρ\_{+}^{'}+ρ\_{-}^{'}=\frac{ρ\_{+}}{\sqrt{1-\frac{v^{2}}{c^{2}}}}+ρ\_{-}\sqrt{1-\frac{v^{2}}{c^{2}}}$$

$$=\frac{ρ\_{+}+ρ\_{-}\left(1-v^{2}/c^{2}\right)}{\sqrt{1-v^{2}/c^{2}}}=\frac{-ρ\_{-}\left(v^{2}/c^{2}\right)}{\sqrt{1-v^{2}/c^{2}}}$$

因此產生長直導線造成的靜電場 $E=線密度λ/2πϵ\_{0}r $

$$E^{'}=\frac{-Aρ\_{-}}{2πϵ\_{0}}\frac{1}{r}\frac{v^{2}/c^{2}}{\sqrt{1-v^{2}/c^{2} }}$$

**電荷守恆和長度收縮的效應，造成另一坐標系之下電場的無中生有。**

接著看受力 $\vec{F}^{'}$

$$\left|\vec{F}^{'}\right|=q\left|E^{'}\right|=\frac{q\left|Aρ\_{-}\right|}{2πϵ\_{0}}\frac{1}{r}\frac{v^{2}/c^{2}}{\sqrt{1-v^{2}/c^{2}}}=\frac{\left|\vec{F}\right|}{\sqrt{1-v^{2}/c^{2}}}$$

其受力的差異必須考慮**時間膨脹** (time dilation)

$$\left|\vec{F}\right|=\frac{∆P\_{z}}{∆t}$$

$$\left|\vec{F}\right|∆t=∆P\_{z}=∆P\_{z}^{'}=\left|\vec{F}^{'}\right|∆t^{'}$$

由於

$$∆t=\frac{∆t^{'}}{\sqrt{1-v^{2}/c^{2}}}$$

則

$$\left|\vec{F}^{'}\right|=\frac{\left|\vec{F}\right|}{\sqrt{1-v^{2}/c^{2} }}$$

以上的要點：電場的無中生有、電荷密度的不平衡。

最直接的做法：

上面這個現象，由場的羅倫茲變換來看更容易：

由於 $\vec{E}=0$

$$\vec{E}\_{⊥}^{'}=\frac{\vec{E}\_{⊥}+\vec{v}×\vec{B}\_{⊥}}{\sqrt{1-v^{2}/c^{2} }}=\frac{\vec{v}×\vec{B}\_{⊥}}{\sqrt{1-v^{2}/c^{2} }}$$

電荷是守恆的。

無論是加熱物體、化學變化等，輕微的電荷不守恆都能容易的檢驗出。

然而電荷密度依賴坐標系，不是守恆量。

**電流密度和電荷密度間的轉換**

**(The Transformation of Current Density and Charge Density)**

兩個坐標系中，有其電流密度和電荷密度，他們之間的關係如何?

$$S\left(ρ,\vec{J}\right)$$

$$S^{'}\left(ρ^{'},\vec{J}^{'}\right)$$

$$\vec{v}$$

要點：注意電荷在哪個坐標系中是靜止的。

電荷密度在 $S$ 中靜止， $ρ=ρ\_{0}$

電荷密度在 $S'$ 中運動， $ρ=\frac{ρ\_{0}}{\sqrt{1-\left(-v\right)^{2}/c^{2}}}=\frac{ρ\_{0}}{\sqrt{1-v^{2}/c^{2}}}$

電荷密度的角色如同質量，$m=m\_{0}$

$$m=\frac{m\_{0}}{\sqrt{1-\left(-v\right)^{2}/c^{2}}}=\frac{m\_{0}}{\sqrt{1-v^{2}/c^{2}}}$$

猜測

$$\left\{\begin{array}{c}ρ^{'}=\frac{ρ-vJ\_{x}/c^{2}}{\sqrt{1-v^{2}/c^{2}}}\\J\_{x}^{'}=\frac{J\_{x}-vρ}{\sqrt{1-v^{2}/c^{2}}}\\J\_{y}^{'}=J\_{y}\\J\_{z}^{'}=J\_{z}\end{array}\right.$$

剛剛的問題中，

$ρ=ρ\_{+}+ρ\_{-}$

$J\_{x}=ρ\_{-}v$

即得

$$ρ^{'}=\frac{\left(ρ\_{+}+ρ\_{-}\right)-v\left(ρ\_{-}v\right)/c^{2}}{\sqrt{1-v^{2}/c^{2}}}=ρ\_{+}^{'}+ρ\_{-}^{'}$$

電荷密度和電流密度的變換公式，是最後被發現的，同時是最難。

相形之下電場與磁場的變換公式最容易，利用相對性原理即可推導。

第一次看費曼的戲法，想必是十分驚艷，此時再回頭，不過就是變換罷了。