**進階電磁學**

**課程筆記**

**第22-1講、**

**The examples/paradoxes of**

**field energy and momentum**

授課教師：台灣大學物理系　易富國教授  
筆記編寫：台灣大學物理系　曾芝寅助理  
編者信箱：[f01222076@ntu.edu.tw](mailto:f01222076@ntu.edu.tw)  
上課學期：100學年度第一學期

[描述: 創用 CC 授權條款](http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/3.0/tw/deed.zh_TW)  
本著作係採用[創用 CC 姓名標示-非商業性-相同方式分享 3.0 台灣 授權條款](http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/3.0/tw/deed.zh_TW)授權.

**教科書**

**Feynman Lecture on Physics, Vol. 2**

**Chapter 27. Field Energy and Field Momentum**

**Chapter 28. Electromagnetic Mass**

**Chapter 31. Tensors**

**悖論**

回顧上次介紹的 four tensor of electromagnetic momentum

或能量動量張量 Energy-momentum tensor

其中，能量密度 ，Poynting向量

的 , 只在空間的部分，叫做馬克斯威爾電磁應力張量。

費曼曾經提到一些有趣的例子：

一、有一轉盤，上有電荷鑲嵌其中，與軸承無摩擦。軸承上另有線圈通上電流。

線圈若停止供電，將產生感應電場，補償電流的方向。轉盤上的電荷會因此推動轉盤，使整個裝置轉動。整個系統原來似從沒有角動量獲得角動量，此例中角動量 (angular momentum) 是否守恆？

二、兩個電荷以不同速度運動如下圖，分析其的受力情形。

兩電荷所受磁力 ， 因 ,

違背牛頓第三運動定律。動量守恆是否仍然成立？

上面這些例子中，動量與角動量的守恆似乎都不存在了。倘若真是如此，世界將變得難以理解。我們必須引入電磁場的動量概念，才得以挽救。

**從例子看Energy Density and Poynting Vector**

Poynting向量

能量守恆的公式 (沒有外界的電流)

例一、在平面 的板上，有隨時間變化的均勻電流

處有電、磁場

與Poynting 向量 , 注意

電流 產生的磁場，使電流板有 方向的受力，產生 方向的動量。

必須存在反向 方向的動量以保持動量守恆。

這個動量來源就是電磁波。跟著Poynting向量所載的電磁波，也是該電流板受力的反作用力所造成。也可以**光壓**的角度看待。

動量密度

例二、平行圓電板電容

兩平行圓電板半徑 ，相距 ，通過穩定電流

穩定不變

總磁能不變 ,

總電能變化

其中， 即電場通量變化率，乘上 ，等效於電流

產生磁場

**注意Poynting vector的方向**。能量的增加，來自能量流由垂直連接兩圓電板間圓柱面方向進入，並非從電線灌入。

費曼給了以下的解釋：

充電可視為將正、負電荷從無限遠處施加能量使之靠近，

電場向內壓縮，能量亦然，違反我們的直覺想像。

例三、實心圓柱狀歐姆電阻

實心圓柱狀電阻，半徑 ，高度 ，通過穩定電流

橫跨電阻兩端的電位差 ，與電場成正比關係

同時流過電阻的電流會產生磁場

歐姆電阻做功 ，以電阻發熱的形式消耗掉。

**注意Poynting vector的方向**。能量的消耗，來自能量流由垂直圓柱面方向進入，並非從電線灌入。

**動量守恆、角動量守恆、與質心定理**

**Momentum Conservation, Angular Momentum Conservation, and Center of Mass theorem**

例一、一道閃光，帶能量 ，從車的左端到了右端。

**若相信能量 具有慣性質量** ，車子便向左移動 ，質心定理給出

因此有 , ,

**這代表了輻射出的這塊能量 ，是帶有動量 。**

反過來說，**假設這塊能量 帶有動量 ，便帶有慣性質量 。**

例二、一道閃光，帶能量 ，從車頂到了車底。

角動量變化

上是即為總角動量守恆，前項是那塊能量的改變，後項是車子的改變。這件事的正確性，來自於**這塊能量 帶有動量 。**

回顧這一講最早的轉盤例子。

將題目改造：在非常大的載流線圈裡頭，放置兩圓柱(長度 )。其中內圓柱(半徑 )帶正電，外圓柱(半徑 )帶負電，兩圓柱結構黏牢在一起。

磁場大小 , 為單位長度內電流線的匝數。

將電流關掉 ，看線圈內的變化。

產生感應電場 ，依法拉第感應定律，

內圓柱力矩 , 外圓柱力矩

力矩和 , 是角動量的變化率

利用積分，求角動量

求電流關掉前的 Poynting vector

,

動量密度

角動量密度 (注意，是空間的常數)

總角動量

這個結果與上面一致，關掉電流是將電磁場的動量轉移到圓柱的力學動量上。