第 14 章

重積分 (Multiple Integrals)

目錄

14.1 矩形上的雙重積分 **149**
14.2 累次積分 **151**
14.3 平均值定理 **152**
14.4 瑕積分 **153**
14.5 在極座標下的重積分 **153**
14.6 直角座標系下的三重積分 **154**
14.7 柱面座標與球面座標上的三重積分 **155**
14.8 三重積分之應用 **156**
14.9 重積分的變數變換 **157**

14.1 矩形上的雙重積分

定義 **目標**. 令 $R=[a,b]\times[c,d]=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid a\le x\le b, c\le y\le d\}$, $z=f(x,y)$ 定義爲在 R 上的連續函數, 且在 R 上 $f(x,y)\ge 0$。令 S 爲 R 之上, 且在 f 之圖形之下的立體區域, 即 $S=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid 0\le z\le f(x,y), (x,y)\in R\}$。欲求 S 的體積。

定義 14.1.1. (1)

(a) 將 $[a,b]$ 等分爲 m 個子區間 $a=x_0, x_1, \cdots, x_{m-1}, x_m=b$, 將 $[c,d]$ 等分爲 n 個子區間 $c=y_0, y_1, \cdots, y_{m-1}, y_m=d$。如此得到 mn 個子矩形 $R_{ij}=[x_{i-1},x_i]\times[y_{j-1},y_j]$, 其面積爲 $\triangle A=\triangle x\triangle y=\frac{b-a}{m}\frac{d-c}{n}$。

(b) 在 R_{ij} 中選一個樣本點 (sample point) $\left(x_{ij}^*, y_{ij}^*\right)$, 得一以 $f\left(x_{ij}^*, y_{ij}^*\right)$ 爲高的立方體, 其體積爲 $f\left(x_{ij}^*, y_{ij}^*\right)\triangle A$。

(c) 如此得 S 之體積的估計值 $V\approx\sum\limits_{i=1}^{m}\sum\limits_{j=1}^{n} f\left(x_{ij}^*, y_{ij}^*\right)\triangle A$。

(d) 定義 $V=\lim\limits_{m,n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{m}\sum\limits_{j=1}^{n} f\left(x_{ij}^*, y_{ij}^*\right)\triangle A$ 爲 S 的體積。

(2) 令 f 爲定義在 R 上的函數, 考慮極限 $\lim\limits_{m,n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{m}\sum\limits_{j=1}^{n} f\left(x_{ij}^*, y_{ij}^*\right)\triangle A$。若此極限存在, 則稱 $f(x,y)$ 在 R 上可積分 (integrable)。此極限稱爲 f 在 R 上的雙重積分 (double integral), 記爲 $\iint_R f(x,y)dA$, $\iint_R f(x,y)dxdy$ 或 $\iint_R f(x,y)dydx$ 。

[註]

(1) $\sum\limits_{i=1}^{m}\sum\limits_{j=1}^{n} f\left(x_{ij}^*, y_{ij}^*\right)\triangle A$ 稱爲一個 Riemann 和。

(2) 重積分的嚴謹定義爲:$\forall\epsilon>0$,$\exists N$ 使得對所有 $m,n>N$, 對任意選取的 $\left(x_{ij}^*, y_{ij}^*\right)\in R_{ij}$ 均有 $\left|\iint_R f(x,y)\,dA-\sum\limits_{i=1}^{m}\sum\limits_{j=1}^{n} f\left(x_{ij}^*, y_{ij}^*\right)\triangle A\right|<\epsilon$。

(3) 若 $f(x,y)\geq 0$ 且爲連續, 則在 R 上, 且在 $z=f(x,y)$ 之下的體積爲 $V=\iint_R f(x,y)\,dA$。

(4) 若 $f(x,y)\leq 0$ 且爲連續, 在 R 上, 且在 $z=f(x,y)$ 之上的體積令爲 V。則 $\iint_R f(x,y)\,dA=-V$。

例 14.1.2. 令 D 爲 $0\leq x\leq 1, 0\leq y\leq 1$, 估計積分 $\int\int_D (x^2+y)dA$ 之值。

定義 14.1.3. 若 D 爲 $\mathbb{R}^2$ 上有界集, $f(x,y)$ 爲定義在 D 上的函數, 取一矩形 R 包含 D, 令

$$F(x,y)=\begin{cases} f(x,y) & ,(x,y)\in D \\ 0 & ,(x,y)\in R\setminus D \end{cases},$$

則定義 f 在 D 上的重積分爲 $\iint_D f(x,y)\,dA=\iint_R F(x,y)\,dA$。

定理 14.1.4. 若 D 爲有界閉集, 其邊界是有限條有限長的曲線。若 f 在 D 上連續, 則 f 在 D 上可積分。

<u>性質</u>

性質 14.1.5. (1) 若 D 的面積爲 0, 則 $\iint_D f(x,y)dA=0$。

(2) $\iint_D 1dA=D$ 的面積。

(3) $\iint_D [f(x,y)+g(x,y)]\,dA=\iint_D f(x,y)\,dA+\iint_D g(x,y)\,dA$。

(4) $\iint_D cf(x,y)\,dA=c\iint_D f(x,y)\,dA$。

(5) 若 $\forall(x,y)\in D$, $f(x,y)\geq g(x,y)$, 則 $\iint_D f(x,y)\,dA\geq\iint_D g(x,y)\,dA$。

(6) $|\iint_D g(x,y)\,dA|\leq\iint_D |g(x,y)|dA$。

(7) 若 $D=D_1\cup D_2$, D_1 及 D_2 至多只在邊界上相交, 則

$$\iint_D f(x,y)\,dA=\iint_{D_1} f(x,y)\,dA+\iint_{D_2} f(x,y)\,dA\ 。$$

(8) 若 $m\leq f(x,y)\leq M$,$\forall(x,y)\in D$, 則 $mA(D)\leq\iint_D f(x,y)\,dA\leq MA(D)$。

例 14.1.6. 求下列積分之值：

(1) 若 R 爲 $a\leq x\leq b, c\leq y\leq d$, 求 $\int\int_R 3dA$。

(2) 求 $\int\int_{x^2+y^2\leq 1}(\sin x+y^3+4)dA$。

(3) 令 D 爲 $x^2+y^2\leq 1$, 求 $\int\int_D\sqrt{1-x^2-y^2}dA$。

14.2 累次積分(iterated integral)

定義 14.2.1. 累次積分 (iterated integral) 爲

$$\int_a^b \int_c^d f(x,y)\,dydx = \int_a^b \left[\int_c^d f(x,y)\,dy\right] dx,$$

$$\int_c^d \int_a^b f(x,y)\,dxdy = \int_c^d \left[\int_a^b f(x,y)\,dx\right] dy。$$

例 14.2.2. 求 $\int_0^3 \int_0^2 x^2 y\ dydx$ 及 $\int_0^2 \int_0^3 x^2 y\ dxdy$。

Fubini 定理

註 14.2.3. 兩種基本型式的區域:
第一型的平面區域 (y-simple domain) 爲

$$D = \{(x,y) \mid a \le x \le b, g_1(x) \le y \le g_2(x)\} \text{ 或記爲 } D: a \le x \le b, g_1(x) \le y \le g_2(x);$$

第二型的平面區域 (x-simple domain) 爲

$$D = \{(x,y) \mid c \le y \le d, h_1(y) \le x \le h_2(y)\} \text{ 或記爲 } D: c \le y \le d, h_1(y) \le x \le h_2(y) \text{ 。}$$

定理 14.2.4 (Fubini)**.** 令 $f(x,y)$ 爲一區域 R 上的連續函數。

(1) 令 D 由 $a \le x \le b, g_1(x) \le y \le g_2(x)$ 所定義, 其中 g_1, g_2 爲 $[a,b]$ 上的連續函數。若 f 在 D 上連續, 則 $\iint_D f(x,y)dA = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)dydx$。

(2) 令 D 由 $c \le y \le d, h_1(y) \le x \le h_2(y)$ 所定義, 其中 h_1, h_2 爲 $[c,d]$ 上的連續函數。若 f 在 D 上連續, 則 $\iint_D f(x,y)dA = \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x,y)dxdy$。

例 14.2.5. 令 $R = [1,2] \times [0,\pi]$, 求 $\iint_R y\sin(xy)\,dA$。

註 14.2.6. 若 $R = [a,b] \times [c,d]$, 則 $\iint_R g(x)\,h(y)\,dA = \int_a^b g(x)\,dx \cdot \int_c^d h(y)\,dy$。

例 14.2.7. $R = \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \times \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, 求 $\iint_R \sin x \cos y\ dA$。

例 14.2.8. 一立體位於正方形 $Q: 0 \le x \le 1, 1 \le y \le 2$ 之上, 且在平面 $z = 4 - x - y$ 之下, 求其體積。

例 14.2.9. 若 T 爲以 $(0,0), (1,0), (1,1)$ 爲頂點之三角形, 求 $\iint_T xydA$。

例 14.2.10. 一立體以平面 $y = 0, z = 0$, $z = a - x - y$ 及柱面 $y = a - \frac{x^2}{a}$ 爲界, 其中 a 爲正常數, 求其體積。

例 14.2.11. 一四面體 T 由平面 $x + 2y + z = 2$、$x = 2y$、$x = 0$、$z = 0$ 所圍成, 求 T 的體積。

例 14.2.12. 令 D 是由 $y = 2x^2$ 及 $y = 1 + x^2$ 所圍成的區域, 求 $\iint_D (x + 2y)\,dA$。

例 14.2.13. 令 D 是由 $y = x - 1$ 及 $y^2 = 2x + 6$ 所圍成的區域, 求 $\iint_D xydA$。

例 14.2.14. 令 D 爲 xy-平面上由 $y = x, y = x + a, y = a$ 及 $y = 3a$ 所圍成之平行四邊行。求 $\iint_R (x^2 + y^2)dA$。

例 14.2.15. 令 D 是半徑爲 a, 圓心爲 (a,a) 之圓與座標軸所圍成之區域。求 $\iint_R \frac{dA}{\sqrt{2a-x}}$。

調換積分次序
在調換積分次序時, 第一步須將積分區域的圖畫出來, 第二步再利用圖形以不同次序描述該區域。

例 14.2.16. 求以下積分值:

(1) 求 $\int_0^1 dx \int_{\sqrt{x}}^1 e^{y^3} dy$。

(2) 求 $\int_0^1 \int_x^1 \sin(y^2)\, dydx$。

(3) 令 D 爲 xy-平面上由 x-軸, $y=x$ 及 $x=1$ 所圍成之三角形。求 $\iint_D \frac{\sin x}{x} dA$。

例 14.2.17. 變換以下各累次積分之積分次序:

(1) $\int_0^{\frac{1}{2}} \int_{1-x^2}^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y) dydx$,

(2) $\int_1^2 \int_{2-x}^{\sqrt{2x-x^2}} f(x,y) dydx$,

(3) $\int_0^{2a} \int_{\sqrt{2ax-x^2}}^{\sqrt{2ax}} f(x,y) dydx$ 。

14.3 平均值定理 (Mean-Value Theorem)

定義 14.3.1. 平面上的集合 D, 若對其上任意兩點, 均在 D 上有一連續的參數曲線將其相連, 則稱其爲連通集 (connected set) 。

定理 14.3.2. (平均値定理) 令 D 爲連通有界閉集。若 $f(x,y)$ 在 D 上連續, 則存在 $(x_0,y_0) \in D$, 使得

$$\iint_D f(x,y) dA = f(x_0,y_0) \cdot (\text{area of } D) \text{ 。}$$

定義 14.3.3. $f(x,y)$ 在區域 R 上的平均值爲 $\frac{1}{R \text{ 的面積}} \iint_R f(x,y) dA$。

例 14.3.4. 求 $f(x,y) = x\cos xy$ 在 $R: 0 \le x \le \pi, 0 \le y \le 1$ 上的平均值。

例 14.3.5. 若區域 D 的面績爲 A, 則 $f(x)=x$ 在 D 上的平均值即爲形心之 x-座標。

例 14.3.6. 若 T 爲以 $(0,0),(1,0),(1,1)$ 爲頂點之三角形。在 T 內隨機的選取大量的點 (x,y), 則對這些點的值 x^2+y^2 平均大約是多少 ?

例 14.3.7. 設 $f(x,y)$ 在區域 D 上連續, 令 (a,b) 爲 D 之內點。對足夠小的正數 r, 令 D_r 爲以 (a,b) 爲圓心, 以 r 爲半徑, 且包含在 D 之內的圓。證明

$$\lim_{r\to 0} \frac{1}{\pi r^2} \iint_{D_r} f(x,y) dA = f(a,b) \text{ 。}$$

14.4 瑕積分 (Improper Integral)

例 14.4.1. 求 $\int\int_R e^{-x^2}dA$, 其中 R 爲 $x \geq 0, -x \leq y \leq x$。

例 14.4.2. 若 D 爲在 x-軸之上, 在曲線 $y = \frac{1}{x}$ 之下, 且在 $x = 1$ 之右的區域, 則積分 $\iint_D \frac{dA}{x+y}$ 是否收斂 ?

例 14.4.3. 求 $\iint_D \frac{1}{(x+y)^2}dA$, 其中 D 爲 區域 $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x^2$。

例 14.4.4. 若 D 爲第一象限中, 介於 $y = x$ 與 $y = x^2$ 之間的有界區域, 則積分 $\iint_D \frac{dA}{xy}$ 是否收斂 ?

14.5 在極座標下的重積分

定理 14.5.1. 考慮極平面上, 由 $\theta = \alpha$, $\theta = \beta$ 及連續曲線 $r = g_1(\theta)$, $r = g_2(\theta)$ 所圍成的 區域, 此處設 $0 \leq g_1(\theta) \leq g_2(\theta)$, $\forall\theta \in [\alpha, \beta]$。設 $f(r, \theta)$ 爲 D 上的連續函數。則 $f(r, \theta)$ 在 R 上的雙重積分爲 $\iint_R f(r, \theta)dA = \int_{\theta=\alpha}^{\beta} \int_{r=g_1(\theta)}^{g_2(\theta)} f(r, \theta)rdrd\theta$。

例 14.5.2. 求雙紐線 $r^2 = 4\cos 2\theta$ 所圍之面積。

例 14.5.3. 若 R 爲環狀 $0 < a^2 \leq x^2 + y^2 \leq b^2$ 位於第一象限, 且在 $y = x$ 之下方的部份。求 $\iint_R \frac{y^2}{x^2}dA$。

例 14.5.4. 一立體在第一卦限上, 且在 $x^2 + y^2 = a^2$ 之內, 在 $z = y$ 之下。求其體積。

例 14.5.5. 一立體位於 $x^2 + y^2 + z^2 = 4a^2$ 及 $x^2 + y^2 = 2ay$ 之內, 其中 $a > 0$。求其體積。

例 14.5.6. 求由 $z = 1 - x^2 - y^2$ 及 $z = 0$ 所圍成的立體區域的體積。

例 14.5.7. 令 D 爲 $y = \sqrt{1 - x^2}$ 及 x 軸所圍的半圓。求 $\iint_D e^{x^2+y^2}dydx$。

例 14.5.8. 令 D 爲第一象限中, 由 $x^2 + y^2 = 4$ 及 $y = \sqrt{2}$ 所圍成的區域, 求 $\iint_D xdA$ 。

例 14.5.9. 求 $I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx$。

例 14.5.10. 將以下積分改爲極座標:

(1) $\int_0^1 \int_{1-x}^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y)dydx$ 。

(2) $\int_0^2 \int_x^{\sqrt{3}x} f(x, y)dydx$ 。

(3) $\iint_R f(x, y)dA$, 其中 D 是由 $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2), a > 0$ 所圍成的區域 。

14.6 直角座標系下的三重積分

定義 14.6.1. (1) 令 $f(x,y,z)$ 為 $B=[a,b]\times[c,d]\times[r,s]$ 上的函數, 將 B 分割成 lmn 個子立方體,$B_{ijk}=[x_{i-1},x_i]\times[y_{j-1},y_j]\times[z_{k-1},z_k]$。則 $\triangle V=\triangle x\triangle y\triangle z$, 在 B_{ijk} 中任取一個樣本點 $\left(x_{ijk}^*,y_{ijk}^*,z_{ijk}^*\right)$, 則得一個三重 Riemann 和 $\sum\limits_{i=1}^{l}\sum\limits_{j=1}^{m}\sum\limits_{k=1}^{n}f\left(x_{ijk}^*,y_{ijk}^*,z_{ijk}^*\right)\triangle V$。

(2) f 在 B 上的三重積分 (triple integral) 為

$$\iiint_B f(x,y,z)\,dV=\lim_{l,m,n\to\infty}\sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}f\left(x_{ijk}^*,y_{ijk}^*,z_{ijk}^*\right)\triangle V。$$

若此極限存在, 則稱 $F(x,y,z)$ 可積分。

定義 14.6.2. 若 E 為空間中一立體, 取一立方體 B 包含 E, 令

$$F(x,y,z)=\begin{cases}f(x,y,z) & ,(x,y,z)\in E\\ 0 & ,(x,y,z)\in B\setminus E\end{cases}。$$

則定義 $\iiint_E f(x,y,z)\,dV=\iiint_B F(x,y,z)\,dV$。

定理 14.6.3 (三重積分的性質)**.** 若 $f(x,y,z)$ 及 $g(x,y,z)$ 為 E 上的連續函數, 則:

(1) $\iiint_E kfdV=k\iiint_D fdV$。

(2) $\iiint_E(f\pm g)dV=\iiint_D fdV\pm\iiint_D gdV$。

(3) 若在 E 上, $f(x,y,z)\geq 0$, 則 $\iiint_D fdV\geq 0$。

(4) 若在 E 上, $f(x,y,z)\geq g(x,y,z)$, 則 $\iiint_D fdV\geq\iiint_D gdV$。

(5) 若 E 是兩個不重疊區域 E_1 及 E_2 之聯集, 則 $\iiint_E fdV=\iiint_{E_1}fdV+\iiint_{E_2}fdV$。

註 14.6.4. (1) 立體區域 E 稱為 type 1, 若 $E=\{(x,y,z)\mid(x,y)\in D,u_1(x,y)\leq z\leq u_2(x,y)\}$。若 f 在 E 上連續, 則 $\iiint_E f(x,y,z)\,dV=\iint_D\left[\int_{u_1(x,y)}^{u_2(x,y)}f(x,y,z)\,dz\right]dA$。
更進一步:
若 D 為 xy-平面上的 type I, 即 $D=\{(x,y)\mid a\leq x\leq b,g_1(x)\leq y\leq g_2(x)\}$, 則 $\iiint_E f(x,y,z)\,dV=\int_a^b\int_{g_1(x)}^{g_2(x)}\int_{u_1(x,y)}^{u_2(x,y)}f(x,y,z)\,dzdydx$;
若 D 為 xy-平面上的 type II, 即 $D=\{(x,y)\mid c\leq y\leq d,h_1(y)\leq x\leq h_2(y)\}$, 則 $\iiint_E f(x,y,z)\,dV=\int_c^d\int_{h_1(y)}^{h_2(y)}\int_{u_1(x,y)}^{u_2(x,y)}f(x,y,z)\,dzdxdy$。

(2) 立體區域 E 稱為 type 2, 若 $E=\{(x,y,z)\mid(y,z)\in D,u_1(y,z)\leq x\leq u_2(y,z)\}$。此時 $\iiint_E f(x,y,z)\,dV=\iint_D\left[\int_{u_1(y,z)}^{u_2(y,z)}f(x,y,z)\,dx\right]dA$。

(3) 立體區域 E 稱為 type 3, 若 $E=\{(x,y,z)\mid(x,z)\in D,u_1(x,z)\leq y\leq u_2(x,z)\}$。此時 $\iiint_E f(x,y,z)\,dV=\iint_D\left[\int_{u_1(x,z)}^{u_2(x,z)}f(x,y,z)\,dy\right]dA$。

例 14.6.5. 將以下積分表成其他五種積分順序。

(1) $\int_0^1 dy \int_y^1 dz \int_0^z f(x,y,z)dx$,

(2) $\int_0^1 dx \int_x^1 dy \int_x^y f(x,y,z)dz$,

(3) $\int_0^1 \int_0^{1-z} \int_0^2 dxdydz$,

(4) $\int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^1 dzdydx$。

例 14.6.6. 令 B 爲 $0 \le x \le a,\ 0 \le y \le b,\ 0 \le z \le c,$, 求 $\iiint_B (xy^2+z^3)dV$ 。

例 14.6.7. 求 $\iiint_{x^2+y^2+z^2\le a^2}(2+x-\sin z)dV$。

例 14.6.8. 若 T 爲以 $(0,0,0),(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)$ 爲頂點之四面體。求 $\iiint_T ydV$ 。。

例 14.6.9. 區域 R 位於平面 $z=3-2y$ 之下, 抛物面 $z=x^2+y^2$ 之上, 求其體積。

例 14.6.10. 區域 D 是由 $z=x^2+3y^2$ 及 $z=8-x^2-y^2$ 所圍成的, 求其體積。

例 14.6.11. 令 E 爲 $y=x^2+z^2$及 $y=4$ 所圍成的區域, 求 $\iiint_E \sqrt{x^2+z^2}dV$。

14.7 柱面座標與球面座標上的三重積分

<u>柱面座標</u>

定理 14.7.1. 若空間中的立體可用柱面座標表示爲 $E=\{(x,y,z)|(x,y)\in D, u_1(x,y)\le z\le u_2(x,y)\}$, 而 $D=\{(r,\theta)|\alpha\le\theta\le\beta, h_1(\theta)\le r\le h_2(\theta)\}$, 則函數 $f(x,y,z)$ 在 E 上的積分爲

$$\iiint_E f(x,y,z)dV = \int_\alpha^\beta \int_{h_1(\theta)}^{h_2(\theta)} \int_{u_1(r\cos\theta,r\sin\theta)}^{u_2(r\cos\theta,r\sin\theta)} f(r\cos\theta,r\sin\theta,z)r\,dz\,dr\,d\theta.$$

例 14.7.2. 求 $\iiint_D (x^2+y^2)dV$, 其中 D 是以 $x^2+y^2=1,\ x^2+y^2=4,\ z=0,\ z=1,\ x=0,\ x=y$ 爲界 。

例 14.7.3. 求在 $x^2+y^2+z^2=6$ 之內, 且在 $z=x^2+y^2$ 之上的立體之體積。

例 14.7.4. 求 $\int_{-2}^2 \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^2 (x^2+y^2)dz\,dy\,dx$。

<u>球面座標</u>

定理 14.7.5. 球面座標下的空間區域 D, 分割後得到圓楔形 (spherical wedge), 它是由點 (ρ_k,ϕ_k,θ_k) 變化 $\Delta\rho_k,\Delta\phi_k,\Delta\theta_k$ 而成。其體積 $\Delta_k=\rho_k^2\sin\phi_k\Delta\rho_k\Delta\phi_k\Delta\theta_k$。因此得

$$\iiint_D F(\rho,\phi,\theta)dV = \iiint_D F(\rho,\phi,\theta)\rho^2\sin\phi d\rho d\phi d\theta。$$

例 14.7.6. 令 B 爲單位球, 求 $\iiint_B e^{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}}dV$。

例 14.7.7. 求 $\iiint_D \sqrt{x^2+y^2+z^2}dV$, 其中 D 是 $x^2+y^2+z^2=z$ 所圍成的立體。

例 14.7.8. 求 $\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{2-x^2-y^2}} z^2dzdydx$

14.8 三重積分之應用

定義 14.8.1. 某立體位於空間中的區域 E, 且其密度函數爲 $\rho(x,y,z)$, 則:

(1) 其質量爲 $M=\iiint_E \rho(x,y,z)dV$。

(2) 對三個座標面的一次矩分別爲

$$M_{yz}=\iiint_E x\rho(x,y,z)dV, M_{xz}=\iiint_E y\rho(x,y,z)dV, M_{xy}=\iiint_E z\rho(x,y,z)dV \text{ 。}$$

(3) 令 $\bar{x}=\frac{M_{yz}}{M}$, $\bar{y}=\frac{M_{xz}}{M}$, $\bar{z}=\frac{M_{xy}}{M}$, 則質心 座標爲 $(\bar{x},\bar{y},\bar{z})$。若密度爲常數, 則質心稱爲形心(centroid)。

(4) 對三個座標軸的二次矩 (moment of inertia) 分別爲

$$I_x=\iiint_E (y^2+z^2)\rho(x,y,z)dV, I_y=\iiint_E (x^2+z^2)\rho(x,y,z)dV, I_z=\iiint_E (x^2+y^2)\rho(x,y,z)dV \text{ 。}$$

(5) 對直線 L 的轉動慣量爲 $I_L=\iiint_E r^2\rho(x,y,z)dV$, 其中 $r(x,y,z)$ 爲 (x,y,z) 到直線 L 的距離 。因此 (4) 即爲 E 對三個座標軸的轉動慣量。

例 14.8.2. 一個立方體 $D:-\frac{a}{2}\le x\le\frac{a}{2},-\frac{b}{2}\le y\le\frac{b}{2},-\frac{c}{2}\le z\le\frac{c}{2}$, 密度 ρ 爲常數, 求 I_x、I_y、I_z。

例 14.8.3. 求由 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$ 及座標面所圍成之四面體的形心 。

例 14.8.4. 一立體以曲面 $x=y^2$ 及平面 $x=z$、$z=0$、$x=1$ 爲界, 求其形心。

例 14.8.5. 一個半徑爲 a 之半球體, 其密度爲 $k(2a-\rho)$ 其中 ρ 是點與球心的距離。求半球的質量。

例 14.8.6. 一立體位於 $x\ge 0,\ y\ge 0,\ z\ge 0,\ x^2+y^2+z^2\le 0$, 若一點與原點距離爲 ρ, 其密度爲$k\rho$。求其重心。

例 14.8.7. E 爲在 $x^2+y^2=1$ 之內, 以 $z=4$ 爲上界、以 $z=1-x^2-y^2$ 爲下界之立體。任一點的密度 與它和 柱面之軸的距離成正比, 求其質量。

例 14.8.8. 一個立體由 $x^2+z^2=a^2, y^2+z^2=a^2, z\ge 0$ 所圍成, 求其形心。

例 14.8.9. 一個密度均匀的立體是位於 $x^2+y^2+z^2=4a^2$ 之內部及 $x^2+y^2=a^2$ 之外部。求其轉動慣量。

<u>曲面面積</u> $S=\iint_D \sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}dA$

例 14.8.10. 求曲面 $z=x^2-y^2$ 位於 $x^2+y^2=a^2$ 之內的部份面積 。

<u>重力引力</u>

例 14.8.11. 一圓盤位於 $x^2+y^2\le a^2$, 其均匀密度爲 σ。一物體位於$(0,0,b)$, 質量爲 m。求兩者間的引力。

例 14.8.12. (a) 一個半徑爲 a 的球, 其密度爲常數, 求它對直徑的轉動慣量 及 radius of gyration。

(b) 一平面與水平面夾角 α。若此球沿平面滾下, 求線性加速度。。

14.9 重積分的變數變換

雙重積分

定義 14.9.1. (1) 一個從 uv-平面到 xy-平面的變換(transformation) 是一個函數 $T : S \to \mathbb{R}^2$ (S 是 $\mathbb{R}^2$ 的子集) , 記爲 $T(u,v) = (x,y)$, 而 $x = g(u,v)$,$y = h(u,v)$。

(2) 若 $T(u_1,v_1) = (x_1,y_1)$, 則 (x_1,y_1) 稱爲 (u_1,v_1) 的寫像(image), 若 $T(S) = R$, 則 R 稱爲 S 的寫像。

(3) 若沒有兩個相異點有相同的寫像, 則稱 T 爲一對一(one to one)。

(4) 若 T 爲一對一, 則 T 有反變換 (inverse transformation) T^{-1} 從 xy-平面對應到 uv-平面。

例 14.9.2. 一個變換之定義爲 $x = u^2 - v^2$,$y = 2uv$,$S = \{(u,v) \mid 0 \le u \le 1, 0 \le v \le 1\}$。求 S 的寫像。

定義 14.9.3. 變換 $T(u,v)$ 定義爲 $x = g(u,v)$,$y = h(u,v)$, 則其 Jacobian 爲 $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$。

定義 14.9.4. 一個變換 $T(u,v) = (g(u,v), h(u,v))$ 若滿足 g 及 h 都有連續的一階偏導函數, 則 T 稱爲 C^1 變換。

定理 14.9.5. 各符號如同前述。假設

(i) T 是 C^1 變換, 其 Jacobian 只可能在孤立點 (isolated point) 爲零。

(ii) T 將 uv-平面上的區域映成 (map onto) xy-平面上的區域 R。

(iii) 除了在 S 的邊界外,T 是一對一。

(iv) $f(x,y)$ 在 R 上連續。

則 $\iint_R f(x,y)\,dA = \iint_S f(x(u,v), y(u,v)) \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| dudv$。

例 14.9.6. 將直角座標變換爲極座標, 其 Jacobian 爲 r。

例 14.9.7. 求橢圓 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 所圍成的區域面積。

例 14.9.8. 求四個拋物線 $y = x^2$, $y = 2x^2$, $x = y^2$, 及 $x = 3y^2$ 所圍成的區域面積。

例 14.9.9. 若 D 爲 x-軸, $y = x$, 及 $x^2 + 4y^2 = 4$ 在第一象限所圍成的區域, 求 $\iint_D \frac{y}{x} dA$ 。

例 14.9.10. 若 T 爲以 $(0,0), (2,0), (1,1)$ 爲頂點之三角形。求 $\iint_T (x+y)^3 dxdy$ 。

例 14.9.11. 令 D 爲 xy-平面上的矩形 $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 1$, S 爲 uv-平面上的矩形 $0 \le u \le 1$, $0 \le v \le 1$。

(a) 證明變換 $x = 4u - 4u^2$, $y = v$ 將 S 映成 D。

(b) 以此求 $\iint_D dxdy$ 。

例 14.9.12. 求 $\int_0^4 \int_{\frac{y}{2}}^{\frac{y}{2}+1} \frac{2x-y}{2}\,dx\,dy$。

例 14.9.13. 求 $\int_0^1 \int_0^{1-x} \sqrt{x+y}(y-2x)^2\,dy\,dx$。

例 14.9.14. 令 R 是由 $xy=1, xy=5, x=1, x=6$ 所圍成, 求 $\iint_R \frac{xy}{1+x^2y^2} dA$。

例 14.9.15. 令 R 是以 $(4,0),(6,2),(4,4),(2,2)$ 爲頂點之四邊形, 求 $\iint_R (x+y)e^{x-y} dA$。

三重積分

定義 14.9.16. 若 $\left\{ \begin{array}{l} x=g(u,v,w) \\ y=h(u,v,w) \\ z=k(u,v,w) \end{array} \right.$ 將 uvw- 空間中空間 G 一對一地對應到 xyz-空間中的 D, 其 Jacobian 爲 $\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix}$。

定理 14.9.17. 若 $f(x,y,z)$ 爲 R 上的連續函數, g,h,k 有連續的偏導函數, 則 $\iiint_R f(x,y,z)\,dV = \iiint_S f(x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w)) \left| \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} \right| dudvdw$。

例 14.9.18. (1) 直角座標變換爲柱面座標的 Jacobian 是 r。

(2) 直角座標變換爲球面座標的 Jacobian 是 $\rho^2 \sin\varphi$。

例 14.9.19. 求 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \le 1$ 之體積。

例 14.9.20. 求 $\int_0^3 \int_0^4 \int_{\frac{y}{2}}^{\frac{y}{2}+1} (\frac{2x-y}{2} + \frac{z}{3})\,dx\,dy\,dz$。