第 13 章

偏導數的應用 (Applications of Partial Derivative)

目錄

13.1 局部極值 (relative extrema)

定義 13.1.1. 令 $f(x,y)$ 定義在包含 (a,b) 之區域 R 上。

(1) 若存在一個 (a,b) 的鄰域 D , 對所有 $(x,y) \in D \cap \mathrm{Dom}\, f$, 均有 $f(x,y) \geq f(a,b)$, 則稱 $f(a,b)$ 爲局部極小值。

(2) 若存在一個 (a,b) 的鄰域 D, 對所有 $(x,y) \in D \cap \mathrm{Dom}\, f$, 均有 $f(x,y) \leq f(a,b)$, 則稱 $f(a,b)$ 爲局部極大值。

(3) 若 $f(x,y) \leq f(a,b), \forall (x,y) \in \mathrm{Dom} f$, 則稱 f 在 (a,b) 有絕對極大值。

(4) 若 $f(x,y) \geq f(a,b), \forall (x,y) \in \mathrm{Dom} f$, 則稱 f 在 (a,b) 有絕對極小值。

(5) 局部極小、極大值統稱爲相對極值 (relative extremum)。絕對極小、極大值統稱爲絕對極值 (absolute extremum)。

定義 13.1.2. (1) 令 P 爲 $f(x,y)$ 之定義域的內點。若 $f_x(P) = f_y(P) = 0$, 則稱 P 爲 f 的臨界點 (critical point, stationary point)。

(2) 令 P 爲 $f(x,y)$ 之定義域的內點。若 $f_x(p)$ 及 $f_y(P)$ 中有一爲不存在 (即 $\nabla f(P)$ 不存在), 則稱 P 爲 f 的奇異點 (singular point)。

定理 13.1.3. (極值的必要條件) 若一函數 $f(x,y)$ 在點 (a,b) 有局部極值或絕對極值, 則 (a,b) 必爲 f 之臨界點, 奇異點或 f 之定義域上的邊界點。

定理 13.1.4. (極值的充分條件) 若 f 的定義域爲 $\mathbb{R}^n$ 上的有界閉集, 且在其上連續, 則

(1) f 之值域爲有界集。

(2) f 有絕對極大值與絕對極小值。

定義 13.1.5. 令 (a,b) 爲可微函數 $f(x,y)$ 的臨界點。假設在任何 (a,b) 的鄰域中, 均有定義域上的點 (x_1,y_1) 使 $f(x_1,y_1)>f(a,b)$, 也有定義域上的點 (x_2,y_2) 使 $f(x_2,y_2)<f(a,b)$。則曲面 $z=f(a,b)$ 上的點 $(a,b,f(a,b))$ 稱爲鞍點 (saddle point)。

例 13.1.6. 討論以下函數的極值。

(1) $f(x,y)=x^2+y^2$,

(2) $f(x,y)=y^2-x^2$,

(3) $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$,,

(4) $f(x,y)=1-x$, 但 $x^2+y^2\le 1$。

例 13.1.7. 求 $f(x,y)=2x^3-6xy+3y^2$ 的臨界點, 並加以分類。

定義 13.1.8. 令 $\mathbf{x}$ 爲 $\mathbb{R}^n$ 的行向量, $\mathcal{A}=(a_{ij})$ 爲 n 階對稱實矩陣。定義

$$Q(\mathbf{x})=\mathbf{x}^t\mathcal{A}\mathbf{x}=\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j \text{ 。}$$

(1) 若對所有 $\mathbf{x}$ 均有 $Q(\mathbf{x})>0$, 則稱 $\mathcal{A}$ 爲正定 (positive definite);

(2) 若對所有 $\mathbf{x}$ 均有 $Q(\mathbf{x})<0$, 則稱 $\mathcal{A}$ 爲負定 (negative definite);

(3) 若對所有 $\mathbf{x}$ 均有 $Q(\mathbf{x})\ge 0$, 則稱 $\mathcal{A}$ 爲半正定 (positive semidefinite);

(4) 若對所有 $\mathbf{x}$ 均有 $Q(\mathbf{x})\le 0$, 則稱 $\mathcal{A}$ 爲半負定 (negative semidefinite);

(5) 若 $\mathcal{A}$ 非以上情形, 則稱 $\mathcal{A}$ 爲不定 (indefinite)。

定理 13.1.9. 令 $\mathcal{A}=(a_{ij})$ 爲 n 階對稱實矩陣。對 $1\le i\le n$, 定義行列式值

$$D_i=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1i} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2i} \\ \cdots & & & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ii} \end{bmatrix}\text{。}$$

(1) 若對所有 $1\le i\le n$ 均有 $D_i>0$, 則 $\mathcal{A}$ 爲正定;

(2) 若對所有偶數的 i 均有 $D_i>0$, 且對所有奇數的 i 均有 $D_i<0$, 則 $\mathcal{A}$ 爲負定;

(3) 若 $\det(\mathcal{A})\ne 0$, 且以上兩情形不成立, 則 $\mathcal{A}$ 爲不定;

(4) 若 $\det(\mathcal{A})=0$, 則 $\mathcal{A}$ 不爲正定或負定, 因此可能是半定或不定。

定理 13.1.10. (極值之二階導數判別法) 假設 $\mathbf{a}=(a_1,a_2,\ldots,a_n)$ 爲$f(\mathbf{x})=f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ 之定義域的內點, 且爲 f 之臨界點。假設 f 的所有二階偏導數在 $\mathbf{a}$ 之某一鄰域上均爲連續。考慮 Hessian 矩陣

$$\mathcal{H}(\mathbf{x})=\begin{bmatrix} f_{11}(\mathbf{x}) & f_{12}(\mathbf{x}) & \cdots & f_{1n}(\mathbf{x}) \\ f_{21}(\mathbf{x}) & f_{22}(\mathbf{x}) & \cdots & f_{2n}(\mathbf{x}) \\ \cdots & & & \cdots \\ f_{n1}(\mathbf{x}) & f_{n2}(\mathbf{x}) & \cdots & f_{nn}(\mathbf{x}) \end{bmatrix},$$

則它是對稱且爲連續,。又

(1) 若 $\mathcal{H}(\mathbf{a})$ 為正定, , 則 $f(\mathbf{a})$ 為局部極小值。

(2) 若 $\mathcal{H}(\mathbf{a})$ 為負定, , 則 $f(\mathbf{a})$ 為局部極大值。

(3) 若 $\mathcal{H}(\mathbf{a})$ 為不定, , 則 $f(\mathbf{a})$ 為鞍點。

(4) 若 $\mathcal{H}(\mathbf{a})$ 不為正定、負定或不定,, 則無法提供任何訊息。

例 13.1.11. 求以下函數的臨界點, 並加以分類。

(1) $f(x,y,z)=x^2y+y^2z+z^2-2x$,

(2) $f(x,y)=xye^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$。

例 13.1.12. 討論 $f(x,y)=x^4+y^4-4xy+1$ 的極值。

例 13.1.13. 討論 $f(x,y)=10x^2y-5x^2-4y^2-x^4-2y^4$ 的極值, 此函數圖形的最高點為何?

例 13.1.14. 求點 $(1,0,-2)$ 到平面 $x+2y+z=4$ 的最短距離。

例 13.1.15. 一個沒有頂蓋之立方體的盒子, 體積為 V 。求如此盒子的最小表面積。

例 13.1.16. 函數 $z=g(x,y)$ 由方程式 $e^{2xz-x^2}-3e^{2yz+y^2}=2$ 所定義。求其臨界點, 並加以分類。

13.2 絕對極值 (Absolule extrema)

註 13.2.1. 由極值定理知, 若 f 在一有界閉集 D 上連續, 則 f 在 D 上有局對極大值及絕對極小值。求絕對極值的步驟:

(a) 求 f 在 D 上的臨界點。

(b) 求 f 在 D 之邊界上的極值。

(c) 比較 (1) 及 (2) 中之值的極大及極小者。

例 13.2.2. 求 $f(x,y)=x^2ye^{x+y}$ 在 $T: x\geq 0, y\geq 0, x+y\leq 4$ 上的最大和最小值。

例 13.2.3. 求 $f(x,y)=x^2-2xy+2y$ 在矩形 $D\{(x,y)\mid 0\leq x\leq 3, 0\leq y\leq 2\}$ 上的極值。

例 13.2.4. 求 $f(x,y)=2xy$ 在閉圓盤 $x^2+y^2\leq 4$ 上的極值。

例 13.2.5. 內接於圓中之三角形, 何者面積最大 ?

<u>線性規劃</u>

例 13.2.6. 求 $F(x,y)=2x+7y$ 在條件 $x+2y\leq 6,\ \ 2x+y\leq 6,\ \ x\geq 0, y\geq 0$ 下的最大值。

例 13.2.7. 某成衣廠有 230 m 布料, 可接受定製至多 20 件衣服、30 件夾克、40 件褲子。每件衣服需要 6 m 布料、每件夾克需要 3 m 布料、每件褲子需要 2 m 布料 ; 每件衣服的利潤是 20 元、每件夾克的利潤是 14 元、每件褲子的利潤是 12 元。他該如何才使利潤最多 ?

13.3 Lagrange 乘數法 (Lagrange Multiplier)

單限制條件

定理 13.3.1 (梯度垂直定理, The orthogonal gradient theorem)**.** 假設一區域 R, 其內點包含平滑曲線 $\mathcal{C}:\mathbf{r}(t)=\langle g(t),h(t),k(t)\rangle$, 且 $f(x,y,z)$ 在 R 上可微。若考慮 f 在 $\mathcal{C}$ 上取值, 且 $f(P_0)$ 爲局部極值, 則在 P_0 點 ∇f 與 $\mathcal{C}$ 垂直。

定理 13.3.2. (Largange Multiplier) 若曲線 $\mathcal{C}$ 由 $g(x,y)=0$ 所定義, $P_0=(x_0,y_{)})\in\mathcal{C}$ 且不爲 $\mathcal{C}$ 的端點。假設 f 及 g 在 $\mathcal{C}$ 上 P_0 的鄰域有連續的一階偏導函數, 且 $\nabla g(P_0)\neq 0$。若將 $f(x,y)$ 限制在 $\mathcal{C}$ 上, $f(P_0)$ 爲局部極值, 則存在 λ_0 使得 (x_0,y_0,λ_0) 爲 Lagrangian 函數

$$L(x,y,\lambda)=f(x,y)+\lambda g(x,y)$$

的臨界點。(λ 稱爲 Largange multiplier。)

例 13.3.3. 求原點到曲線 $x^2y=16$ 的最短距離。

例 13.3.4. 求曲線 $17x^2+12xy+8y^2=100$ 的點到原點的最近與最遠距離。

例 13.3.5. 求函數 $f(x,y)=y$ 在限制條件 $y^3-x^2=0$ 之下的最小值。

例 13.3.6. 求 $f(x,y)=x^2+2y^2$ 在圓盤 $x^2+y^2\leq 1$ 上的極值。

例 13.3.7. 求在球 $x^2+y^2+z^2=4$ 上距離 $(3,1,-1)$ 最遠的點。

例 13.3.8. Find the minimum and maximum values of $x^3+2xyz-z^2$ subject to the constraint $x^2+y^2+z^2=1$ 。

多限制條件

定理 13.3.9. 考慮函數 $f(\mathbf{x})$ 在限制條件 $g_{(1)}(\mathbf{x})=0,\ldots,g_{(m)}(\mathbf{x})=0$ 之下的極值。假設是 $f(P_0)$ 是極值, 且 f 及所有 $g_{(j)}$ 均在 P_0 的鄰域有連續的一階偏導函數, 又 $g_{(j)}=0$ 相交 之區域在 P_0 附近是平滑的, 則 P_0 是 Lagrangian 函數

$$L(\mathbf{x},\lambda_1,\ldots,\lambda_m)=f(\mathbf{x})+\sum_{j=1}^{m}\lambda_j g_{(j)}(\mathbf{x})$$

的臨界點。

例 13.3.10. 求函數 $f(x,y,z)=xy+2z$ 在 $x+y+z=0$ 與 $x^2+y^2+z^2=24$ 所相交之圓上的最小及最大值。

例 13.3.11. 平面 $x+y+z=1$ 與 $x^2+y^2=1$ 交成一橢圓。求橢圓上與原點距離最遠及最近的點。