**普通物理學甲下**

**課程筆記**

**二十一、電磁學**

**能量流、電磁場動量**

授課教師：台灣大學物理系　易富國教授
筆記編寫：台灣大學物理系　曾芝寅助理
編者信箱：r01222076@ntu.edu.tw
上課學期：98學年度第二學期


本著作係採用[創用 CC 姓名標示-非商業性-相同方式分享 3.0 台灣 授權條款](http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/3.0/tw/deed.zh_TW)授權.

**平行電板問題**

兩無限大之平面電板，座落$y$*-*$z$平面，互持有電性相反之等量電荷面密度 $σ$，正電板以速度 $v\_{z}(t)$ 在 $z$ 方向上運動 (速度為時間之函數)，負電板以 $-v\_{z}(t)$ 運動，求空間中之電、磁場。

+ + + +

$$+σ$$

$$-σ$$

$$v\_{z}(t)$$

$$-v\_{z}(t)$$

+ + + +

$v\_{z}(t)∆t$

$$1$$

$$\vec{e\_{z}}$$

$$\vec{e\_{x}}$$

$$\vec{e\_{y}}$$

**注意：**電磁場傳播速度為光速 (有限的)。只有電板附近的磁場由電流所感應；遠離電板處的磁場是由附近電場感應生成，因而有**時間的延遲**。

**鄰近電板處 (電流生磁場、磁場生電場)**

總電流 $2σv\_{z}(t)$，鄰近磁場強度 $B(t)=μ\_{0}σv\_{z}\left(t\right)$，方向可由安培右手定則定出。

若速度非定值，則磁場亦隨之變化，並生成感應電場。

磁、電場可寫成 $\vec{B}=B\_{y}(x,t)\vec{e\_{y}}$ ; $ \vec{E}=E\_{z}(x,t)\vec{e\_{z}}$，理由請參考上一講。

**遠離電板處 (不必再考慮電流)**

$\left\{\begin{array}{c}\left(\frac{∂^{2}}{∂x^{2}}-μ\_{0}ϵ\_{0}\frac{∂^{2}}{∂t^{2}}\right)E\_{z}\left(x,t\right)=0\\\left(\frac{∂^{2}}{∂x^{2}}-μ\_{0}ϵ\_{0}\frac{∂^{2}}{∂t^{2}}\right)B\_{y}\left(x,t\right)=0\end{array}\right.$ (一維)波動方程式。

+ + + +

$$+σ$$

$$-σ$$

+ + + +

$$\vec{e\_{z}}$$

$$\vec{e\_{x}}$$

$$\vec{e\_{y}}$$

$$\vec{E}$$

$$\vec{B}$$

$$\vec{E}$$

$$\vec{B}$$

**方程式** $\left(\frac{∂^{2}}{∂x^{2}}-\frac{1}{c^{2}}\frac{∂^{2}}{∂t^{2}}\right)f\left(x,t\right)=0$ **有典型的解法**

$f\left(x,t\right)=g\left(x-ct\right)+h\left(x+ct\right)$ 必為一解，

分別代表向右移動 $g\left(x-ct\right)$ 和向左移動 $h\left(x+ct\right)$ 。

磁場

$x>0$，$B\_{y}\left(x,t\right)=μ\_{0}σv\_{z}\left(t-\frac{x}{c}\right)$

$x<0$，$B\_{y}\left(x,t\right)=-μ\_{0}σv\_{z}\left(t+\frac{x}{c}\right)$

電場

$x>0$，$E\_{z}\left(x,t\right)=-cμ\_{0}σv\_{z}\left(t-\frac{x}{c}\right)=-cB\_{y}\left(x,t\right)$

$x<0$，$E\_{z}\left(x,t\right)=-cμ\_{0}σv\_{z}\left(t+\frac{x}{c}\right)=cB\_{y}\left(x,t\right)$

兩者皆有 $\left|E\_{z}\right|=c\left|B\_{y}\right|$。

**注意：**前提為 $\frac{dv\_{z}(t)}{dt}\ne 0$，穩定電流不會感應出電場。

**特點**

1. 電場強度為磁場強度之*c*倍
2. 電、磁場互相垂直，並與傳播方向也垂直。磁場於電板兩側方向相反，電場則相同並與電流反向。
3. 電、磁場用相同的速度*c*在傳播。
4. 感應電、磁場生成並非立即的效應，而有著時間 $t=\frac{\left|x\right|}{c}$ 的延遲。

**本問題有什麼用——光在物質裡行進的問題**

所有物質可視為一片一片平板之堆疊，當平面電磁波進來時，電子受作用震盪，就如平板之上下運動。

以特例 $v\_{z}\left(t\right)=v\_{0}\sin((ωt))$ 探討，

在 $x>0$，

$E\_{z}\left(x,t\right)=-cμ\_{0}σv\_{z}\left(t-\frac{x}{c}\right)=-cμ\_{0}σv\_{0}\sin(\left(ω\left(t-\frac{x}{c}\right)\right))$

$ =E\_{0}\sin(\left(ωt-\frac{ω}{c}x\right))$, $E\_{0}=-cμ\_{0}σv\_{0}$

有以下關係：

角頻率 $ω$, 頻率 $f=\frac{ω}{2π}$

波數向量 $k=\frac{ω}{c}$, 波長 $λ=\frac{c}{f}=\frac{2π}{ω}c=\frac{2π}{k}$

$\left\{\begin{array}{c}k=\frac{2π}{λ}\\ω=ck=2πf\end{array}\right.$

$E\_{z}\left(x,t\right)=E\_{0}\sin(\left(ωt-kx\right))$

**電磁波傳遞了什麼？**

電場能量密度 $u\_{E}=\frac{ϵ\_{0}}{2}\vec{E}∙\vec{E}$

磁場能量密度 $u\_{B}=\frac{1}{2μ\_{0}}\vec{B}∙\vec{B}$

在電磁波中 $\left|\vec{E}\right|=\left|\vec{B}\right|c$

得 $u\_{E}=\frac{ϵ\_{0}}{2}c^{2}\vec{B}∙\vec{B}=\frac{ϵ\_{0}}{2}\frac{1}{μ\_{0}ϵ\_{0}}\vec{B}∙\vec{B}=u\_{B}$

總能量密度 $u\_{E}+u\_{B}=2u\_{E}=2u\_{B}=ϵ\_{0}\vec{E}∙\vec{E}=\frac{1}{μ\_{0}}\vec{B}∙\vec{B}$

定義能量流 (強度)：

單位時間 $∆t$ (走距離 $∆x=c∆t$) 內通過單位截面$A$之能量

體積 $A∙∆x$

總能量 $\left(u\_{E}+u\_{B}\right)A∙∆x$

能量流向量，又稱坡印廷向量 (Poynting Vector)，記作 $\vec{S}$

能量流(強度)$ \left|\vec{S}\right|$

$=\frac{\left(u\_{E}+u\_{B}\right)A∙∆x}{A∙∆t}=\left(u\_{E}+u\_{B}\right)c$

$=c\sqrt{\left(ϵ\_{0}\vec{E}∙\vec{E}\right)\left(\frac{1}{μ\_{0}}\vec{B}∙\vec{B}\right)}=\frac{1}{μ\_{0}}\left|\vec{E}\right|\left|\vec{B}\right|$

定義**能量流強向量** $\vec{S}=\frac{1}{μ\_{0}}\vec{E}×\vec{B}$

$$∆x$$

*A*

+ + + +

$$+σ$$

$$-σ$$

+ + + +

$$\vec{e\_{z}}$$

$$\vec{e\_{x}}$$

$$\vec{e\_{y}}$$

$$\vec{S}$$

$$\vec{E}$$

$$\vec{B}$$

**例一 歐姆電阻 (圓柱狀)**

電阻圓柱半徑 $a$，柱高 $l$，電阻率 $R$，通過電流 $I$，圓柱面上磁場 $\vec{B}$、電場 $\vec{E}$

$$I$$

$$a$$

$$∆V$$

$$l$$

$$\vec{E}$$

$$\vec{S}$$

$$\vec{B}$$

已知歐姆電阻滿足電位差 $∆V=IR$，電阻消耗功率為 $I∆V$

$\left|\vec{B}\right|=\frac{μ\_{0}I}{2πa}$，$\left|\vec{E}\right|l=∆V$

$\left|\vec{S}\right|=\frac{1}{μ\_{0}}\left|\vec{E}\right|\left|\vec{B}\right|$，

單位時間內流進電阻之能量 $2πal\left|\vec{S}\right|=2πal\frac{1}{μ\_{0}}\left|\vec{E}\right|\left|\vec{B}\right|=I∆V$，即**功率**。

**注意能量流方向**：能量並非從電線方向灌入，而是由垂直圓柱面方向進入。

**例二 電容 (平行圓電板)**

$$h$$

$$I$$

$$A$$

$$\vec{B}$$

$$\vec{E}$$

$$+Q(t)$$

$$-Q(t)$$

$$r$$

$$\vec{S}$$

兩平行圓電板面積 $A$，半徑 $r$，相距 $h$，充電 $Q(t)$，通過穩定電流 $I$，生成磁場 $\left|\vec{B}\right|=\frac{μ\_{0}I}{2πr}$

$\left|\vec{E}\right|=\frac{Q(t)}{ϵ\_{0}A}$，$u\_{E}=\frac{ϵ\_{0}}{2}\left|\vec{E}\right|^{2}$

$\left|\vec{B}\right|=\frac{μ\_{0}I}{2πr}=\frac{μ\_{0}}{2πr}\frac{dQ(t)}{dt}=\frac{μ\_{0}}{2πr}ϵ\_{0}A\frac{d\left|\vec{E}\right|}{dt}$

總電能 $U\_{E}=u\_{E}∙Ah=\frac{ϵ\_{0}}{2}\left|\vec{E}\right|^{2}Ah$

單位時間內流進電容之能量$2πrh\left|\vec{S}\right|=2πrh\frac{1}{μ\_{0}}\left|\vec{E}\right|\left|\vec{B}\right|=2πrh\frac{1}{μ\_{0}}\left|\vec{E}\right|\frac{μ\_{0}}{2πr}ϵ\_{0}A\frac{d\left|\vec{E}\right|}{dt}=ϵ\_{0}Ah\left|\vec{E}\right|\frac{d\left|\vec{E}\right|}{dt}=\frac{dU\_{E}}{dt}$

$$2πrh\left|\vec{S}\right|=\frac{dU\_{E}}{dt}$$

**注意能量流方向**：能量並非從電線灌入，而是由垂直連接兩圓電板間圓柱面方向進入。

**結論：**

充電可視為將正、負電荷從無限遠處施加能量使之靠近，

$$+Q$$

$$-Q$$

$$+Q$$

$$-Q$$

$$\vec{S}$$

電場向內壓縮，能量亦然，違反我們的直覺想像。