分析一 臺大數學系 齊震宇 教授

- 課程概要：

  本課程可視為【微積分一、二】(數微)的延續；同時，在過程中亦將使用數微的各種內容，建議有興趣的朋友先參考數微的課程網頁：
  http://ocw.aca.ntu.edu.tw/ntu-ocw/
  在該網頁中有列一些相關資源的連結，請多加利用。

  【分析】課程概述

  在數學中，「分析」是「所有關於數量的研究」的同義詞。那麼，這裡說的「數量」是什麼呢？粗略地說，數量指的是「定義在空間上的函數」。這時自然得問：「空間是什麼？函數又是什麼呢？」雖然這些辭彙我們在中學(或甚至小學？)便聽過，在日常生活中亦不乏使用的機會，在數學中它們卻常有更多的樣貌。
  若不算中小學裡學習有關數量的常識，微積分大概是許多人了解分析的起點，在那裡，我們密集地接觸了求總和(級數、面積、體積、通量等)與求變化率(導數、速度、加速度、密度、曲率等)的觀念，以及它們之間的種種關聯。在微積分的基礎學習階段，所謂的「空間」大多指的是 n 維歐氏空間(例如大家熟悉的 xyz 實數坐標空間)及其中某些特殊形態的子集合，如曲線、曲面等等。「函數」則是以這些集合為定義域的實數值或是向量值函數。在【分析】中，我們將談論更廣義的空間與函數觀念。以下略舉幾個重點來介紹。

  (1) 一般拓樸學(general topology)初步 — 拓樸空間(topological space)與連續函數/映射

  在微積分的課程中，我們已經提到了距離空間(metric space)的觀念，距離結構一方面定義了哪些子集是「開」的，另一方面則定義了函數/映射的極限與連續性。最終，我們發現，函數的連續性表面上雖然是利用距離結構定義的，但實際上只要知道哪些子集是開集便決定了。在【分析】這門課裡，我們會介紹拓樸空間，它們是這樣的一個集合：其中的一些子集被適當地直接規定為開集。一旦開集被指定了，函數的連續性便能被定義。(也就是繞過了距離結構的

觀念。)在距離空間中討論過的許多觀念(如開集、閉集、邊界、極限點、緊緻性、連續映射)及它們的性質都可以在拓樸空間這個新的架構下重現。

距離空間的概念對一般人來說是較為直觀的，因此初學者很容易產生「為什麼要引進拓樸空間這種抽象玩意兒」這樣的疑問。其實，拓樸空間一個表面上的好處是，許多論證在這個新架構下變得更單純，以前種種透過距離比較進行的論證被代之以集合論式的論證；更重要的是，我們可以討論的東西不再限於歐氏空間中的物件，而且在處理「將若干空間黏貼成一個空間」這件事情上變得更單純、更有系統。這在未來將對進一步理解各種函數空間與幾何學中的空間(如流形(manifold)、多樣體(variety))時有很大的幫助。

(2) 測度論(measure theory) — 可測空間(measurable space)、可測映射/函數與測度

求導(微分)與求積分是微積分的主旋律。可是，原先的積分操作只能對連續性較強的函數施行;此外,即使一列可積分的函數有極限，只有在較強的假設下，這個極限函數的積分才會等於原本函數列各項積分的極限。此外，應用廣泛的微積分基本定理僅在函數是連續可微分的情況被證明為真。這樣的處境在十九世紀末許多數學家的努力之下，終於在進入二十世紀之際由勒貝格(Lebesgue)發展成了今日被稱為測度論的理論的骨幹。

在定義一個函數的黎曼積分時，我們需要將其定義域切割成小方塊，並且利用它們的體積來計算黎曼和，然後取這個和在方塊尺寸趨於零時的極限。勒貝格的根本想法很單純：不要直接切割定義域，改成將函數值範圍切割案成小範圍,再找出定義域中對應的部分(它們常常不是方塊的模樣)，接者拿這每個部分的體積(如果有定義)來形成一個類似的和，然後求極限。要這麼做，這些形狀不定的部分必須要有體積的觀念，「在怎麼樣的子集上能系統地定義性質良好的體積」便成了測度論的起點。

我們將在【分析】這門課裡，介紹測度論的一些基本概念。在這個

新理論架構下，積分操作能對更一般的函數施行，同時在很弱的假設下，積分與求函數列極限有很好的交換性。當積分理論有了這樣的革新，微分理論也相應地得到系統的發展，例如我們能知道微積分基本定理恰好對具有哪種性質的函數成立，也對於「密度」— 給定測度對另一個測度的微分 — 這個概念有了更完整的認識。或許可以說，較之於傳統的微分與積分理論，測度論是一個在不少方面更自由自在的微積分理論，這些新的彈性空間讓人們能做許多從前不被允許的事。它已經成為眾多數學分支的基本工具，提供了許多基本的函數空間範例，也為機率論奠定了理論基礎。

(3) 廣義的向量分析 — 流形上的微積分

三維空間中的向量微積分 — 梯度(grad)、旋度(curl)、散度(div)、Green-Stokes 定理以及 Gauss 散度定理 — 常被作為一般多變數微積分課程的最終樂章。作為微積分基本定理/分部積分的高維度延伸，一方面，它們令學習者感到奇妙而著迷；另一方面，那些規律有點相似卻又不盡相同的模樣又令他們感到身陷五里霧中。其實，這裡所有的概念與定理都可以推廣到抽象的高維度曲面 — 微分流形(differentiable manifold) —上頭。

在【分析】中，我們會介紹微分流形與它們上面的張量的觀念，然後發展微分型(differential form) — 反對稱張量 — 的積分理論。我們將會看到，從前向量分析中那些令人眼花撩亂的定理可以全部用一個等式代表(流形上的 Stokes 定理)。Poincare 是最早注意到這些微分型對幾何學(微分幾何、拓樸學)研究的重要性的人之一，他發現微分型不只有微積分計算上的意義與功能，更提供了某種測知一個高維度區域有幾個「高維度的洞」所需的訊息。這些想法後來經過幾代的數學家們的發展，成為貫穿整世紀幾何學思想的主軸之一。

(4) 泛函分析初步 — Banach 空間與 Hilbert 空間

前面已經提到，空間上的函數是數學分析的研究對象。人們從這些研究經驗中發現，定義在特定類型的空間上、具有特定性質的一類

函數全體本身常可以被視為一個具有某些常見特殊結構(像是範(norm)或內積)的空間，而了解具有這些特殊結構的空間的性質常能加深我們對此類函數的認識。舉例來說，利用 Picard 迭代法，我們可以為很一般的常微分方程構造給定初始值的解。將這個迭代法的論證抽象化後，便得到了一般 Banach 空間上的收縮映射原理，而反過來這個原理又可被用以得到其他有意義的結果，例如反函數定理。另一個例子是富立葉級數。富立葉最初的想法是每個周期函數都「等於」一些正、餘弦波疊加的結果。直到二十世紀，這「等於」兩字的幾種意義才逐漸被釐清，其中之一便是從 Hilbert 空間的觀點來看待這個疊加問題。在那裡，正、餘弦函數構成了一組 Hilbert 正交基底，而這個疊加的表示則來自將周期函數表示這組基底的線性組合。後來的數學家考慮了其他種類的基底並發展了更多樣化的理論(如小波理論)，成為調和分析中的新篇章。

把一類函數視為一個空間進行研究粗略來說就是數學中所謂的「泛函分析」。我們將會在【分析】中介紹泛函分析中最基本、應用最廣泛的 Banach 空間與 Hilbert 空間。

- 課程要求：現階段，建議先觀看臺大數學系官網上的課程影片：
  （1）高中銜接大學預備課程（關於邏輯與集合的部分；其他部分能看看也很好）。
  （2）微積分一、二（看越多越好）

  另外，盡可能熟悉集合與映射的操作，建議先閱讀參考書目 Bredon, Topology and Geometry 的 Appendix B。這裡有一些略有挑戰性的題材。

  最後，最重要的是要有一顆為了追求真理而不畏挫折的心。我可以保證這會是一門讓大家充滿挫折的課唷。：）

- 指定閱讀：
  Bott and Tu, Differential Forms in Algebraic Topology
  Bourbaki, General Topology I
  Bredon, Topology and Geometry

Cohn, Measure Theory
Rudin, Real and Complex Analysis
Rudin, Functional Analysis

- 指定閱讀：
  一般拓樸學：
  Bredon, Topology and Geometry, Chapter I

  測度論：
  Rudin, Real and Complex Analysis, Chapters 1, 2, 3, 6, 7, and 8

  流形與微分型理論：
  Bredon, Topology and Geometry, Chapter II

  Banach 空間與 Hilbert 空間基本理論：
  Rudin, Real and Complex Analysis, Chapters 3, 4, and 5